

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

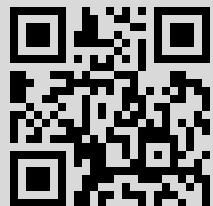
Б. А. Кулик, Новые классы КНФ, с полиномиально распознаваемым свойством выполнимости, *Автомат. и телемех.*, 1995, выпуск 2, 111–124

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.66.210.157

21 апреля 2020 г., 12:42:12



Моделирование поведения и интеллекта

УДК 519.7

© 1995 г. Б. А. КУЛИК
(НПО "Аврора", Санкт-Петербург)

НОВЫЕ КЛАССЫ КНФ С ПОЛИНОМИАЛЬНО РАСПОЗНАВАЕМЫМ СВОЙСТВОМ ВЫПОЛНИМОСТИ

На основе методов алгебры кортежей [1] разработан алгоритм решения задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ КНФ. Доказано, что для класса "плотных" КНФ, у которых "пустые" переменные, не включенные в дизъюнкты, распределены равномерно с вероятностью не более $1/3$, сложность этого алгоритма в среднем полиномиальна. Рассмотрены варианты выигрышной стратегии этого алгоритма, позволяющие расширить класс КНФ с полиномиально распознаваемым свойством выполнимости.

1. Введение

Известно [2, 3], что задача распознавания выполнимости произвольной КНФ относится к NP -полным задачам. Этой задаче посвящено значительное число исследований, в результате которых установлены некоторые классы КНФ, выполнимость которых распознается с помощью алгоритмов полиномиальной сложности. Одним из возможных подходов к решению проблемы $P = NP$ является накопление результатов по полиномиально распознаваемым классам КНФ и сравнение множества всех возможных КНФ с множеством полиномиально распознаваемых КНФ.

В данной работе предлагается новый подход к решению задачи выполнимости КНФ, позволяющий выделить новые полиномиально распознаваемые классы этих задач. В основе подхода лежит алгебра кортежей (TA) [1]. Выбор такого подхода объясняется не только субъективными причинами. Во-первых, сама идея описываемого ниже алгоритма была найдена при анализе задачи выполнимости в понятиях TA . Во-вторых, естественные для TA понятия "проекция", "блочная матрица" и некоторые другие, с помощью которых легко осуществляется распознавание важных для сокращения перебора классов индивидуальных задач, в традиционных понятиях не имеют такой же простой интерпретации.

2. Основные сведения из алгебры кортежей

Рассмотрим класс RS реляционных формальных систем, основанных на исчислении предикатов, у которых множество выполняющих подстановок для каждой правильно построенной формулы, содержащей k переменных, может быть представлено как некоторое (возможно, пустое или бесконечное) k -местное отношение. Для этого класса определим *гибкий универсум* (FU – flexible universe), используя следующую структуру.

Пусть дано множество $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ сортов и множество $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ координат. Для этих множеств установлено функциональное соответствие $F : (X \rightarrow S)$ и каждая координата равна соответствующему сорту. Термин "координата" здесь используется потому, что все структуры TA имеют матричные

свойства. Вводится также множество V переменных. Для множеств V и X также устанавливается функциональное соответствие $f: (V \rightarrow X)$. Переменные могут использоваться как в собственных, так и в несобственных координатах, но в случае их использования в несобственных координатах при анализе выполняющих подстановок формулы возникает ряд ограничений, которые здесь не будем рассматривать. Будем обозначать координаты и соответствующие им переменные одинаковыми символами (возможно, с индексами), но координаты – прописными буквами, а переменные – строчными.

Произвольный частный универсум U , включенный в FU , определяется как декартово произведение координат, содержащихся в некоторой их последовательности (X_i, X_j, \dots, X_k) . Нетрудно доказать, что любая общезначимая формула $G(x_i, x_j, \dots, x_k)$ в системе класса RS может быть представлена как некоторый частный универсум $U = X_i \times X_j \times \dots \times X_k$. Следовательно, FU является в RS классом эквивалентности всевозможных частных универсумов.

Минимальный вариант алгебры кортежей (RTA) представляет отображение класса формальных систем, основанных на исчислении предикатов, в котором применяются только одноместные предикаты и отсутствуют функциональные символы. Расширенные варианты TA , а также интерпретация кванторов в TA в данной статье не рассматриваются.

Пусть для каждой координаты X множество соответствующих ей одноместных предикатов $\{Q_i(x)\}$ вложено в булеву алгебру

$$A = \langle P(X), \cup, \cap, - \rangle, \text{ где } P(X) - \text{ множество всех подмножеств } X.$$

Константами в TA являются некоторые подмножества координат. В частности, константами могут быть области истинности соответствующих одноместных предикатов. Особо выделяются две константы: $*(x)$ и \emptyset , где предикат $*(x)$ равен соответствующей координате X , а \emptyset обозначает пустое множество. Если соответствие переменной x и координаты X ясно из контекста (в частности, при матричном отображении), то произвольный предикат $Q(x)$ обозначается просто символом предиката (Q); это же относится и к константе $*(x)$. Константы $*$ и \emptyset аналогичны логическим константам $TRUE$ и $FALSE$. Эта аналогия следует из очевидных соотношений:

$$Q \cap * = Q; \quad Q \cup * = *; \quad Q \cap \emptyset = \emptyset; \quad Q \cup \emptyset = Q; \quad \bar{*} = \emptyset,$$

где Q – произвольное подмножество соответствующей координаты.

Правильно построенные формулы в минимальном варианте RS могут быть легко преобразованы в структуры TA , называемые TA -объектами. В TA используется четыре класса структур. Из них два класса (C -кортежи и D -кортежи) являются векторами и два класса (C -системы и D -системы) – матрицами.

C -кортежи соответствуют конъюнктам одноместных предикатов, принадлежащих разным координатам. Соответственно D -кортежи соответствуют дизъюнктам одноместных предикатов. В рамках TA все структуры являются множествами, содержащими в качестве элементов элементарные кортежи, т.е. C -кортежи, у которых каждая компонента является одноэлементным множеством.

C -системы являются объединением C -кортежей и соответствуют обобщенным ДНФ, а D -системы являются пересечением D -кортежей и соответствуют обобщенным КНФ. Под “обобщенными” в данном случае понимаются ДНФ или КНФ, у которых в качестве литералов используются произвольные (в нашем случае одноместные) предикаты.

Основной характеристикой любого TA -объекта является схема отношения $R(L)$, где R – имя отношения, а L – последовательность имен координат. Универсумом $U(R)$ каждого отношения R является соответствующий ему частный универсум, включенный в FU .

Чтобы осуществлять произвольные теоретико-множественные операции над TA -объектами с произвольными схемами отношений, вводятся фиктивные координаты. *Фиктивной координатой* TA -объекта является координата, представленная в C -кортежах и в C -системах только константами $*$, а в D -кортежах и в D -системах – только константами \emptyset . Возможны TA -объекты, у которых фиктивные координаты содержат произвольные множества, но они могут быть преобразованы в TA -объекты, содержащие в этих координатах только соответствующие константы. В TA разработаны эффективные алгоритмы распознавания и преобразования таких TA -объектов.

Чтобы отличать матричные отображения C -кортежей или C -систем от D -кортежей или D -систем, первые ограничиваются парой прямых скобок $([,])$, а вторые – парой прямых перевернутых скобок $(], [)$. Например, формула $F = (P(x) \wedge Q(y)) \vee \vee(S(x) \wedge T(z))$ может быть представлена как C -система $CF = \begin{bmatrix} R & Q & * \\ S & * & T \end{bmatrix}$ со схемой отношения $CF(x, Y, Z)$, где P, Q, S, T – области истинности соответствующих предикатов формулы F . Отрицание формулы $G = P(x) \wedge Q(z)$ равно дизъюнкту $\sim P(x) \vee \sim Q(z)$ и может быть представлено как D -кортеж $DG =]\bar{P} \emptyset \bar{Q}[$ со схемой отношения $DG(X, Y, Z)$. Здесь Y – фиктивная координата.

Если какая-то формула F из RS преобразуется в TA -объект T , то множество элементарных кортежей, содержащихся в T , является множеством выполняющих подстановок формулы F . В связи с этим возникает проблема *перечисления* TA -объектов, т.е. преобразования произвольного TA -объекта в множество выполняющих подстановок. Проще всего эта процедура осуществляется для C -кортежей – множество элементарных кортежей C -кортежа равно декартовому произведению его компонент. Перечисление C -систем производится с помощью последовательного перечисления C -кортежей, содержащихся в этой C -системе. Для D -кортежей и D -систем эта процедура более сложна – для этого необходимо осуществлять преобразование таких TA -объектов в C -системы. Рассмотрим основные операции и сравнения, реализуемые над TA -объектами.

Любые пары TA -объектов можно с помощью добавления фиктивных координат и в некоторых случаях за счет перестановки координат в схемах отношений привести к *однотипным* схемам отношений, в которых содержится одна и та же последовательность координат. Поэтому достаточно определить последовательность элементарных операций для реализации теоретико-множественных операций и сравнений над TA -объектами с однотипными схемами отношений, содержащими n координат.

Пусть A, B – некоторые TA -объекты. Обозначим a_{ij}, b_{ij} их компоненты. Для C - или D -систем a_{i*}, b_{i*} обозначают C - или D -кортежи, содержащиеся в них. Если A или B содержат одну строку (т.е. являются C - или D -кортежами), то их компоненты обозначаются соответственно a_i и b_i . Выражение $[f_i]$, в котором i изменяется от 1 до n , означает C -кортеж $[f_1 f_2 \dots f_n]$, а выражение $]f_i[$ при этих условиях означает D -кортеж $]f_1 f_2 \dots f_n[$.

Следующие восемь утверждений приводятся без доказательства (более подробно об этом см. в [1]).

S1) Для любого TA -объекта A его дополнение равно TA -объекту альтернативного класса (имеются в виду классы C - или D -) и той же размерности, в котором каждая компонента a_{ij} преобразована в ее дополнение.

S2) Для C -кортежей A, B справедливо:

$$(i) A \cap B = \left[\bigcap_{i=1}^n (a_i, b_i) \right]. \text{ Если } \exists i(a_i \cap b_i = \emptyset), \text{ то } A \cap B = \emptyset;$$

$$(ii) A \cup B = \left[\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right] \subseteq \left[\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i) \right];$$

$$(iii) A \subseteq B, \text{ если и только если } \forall i(a_i \subseteq b_i).$$

S3) Для D -кортежей A, B справедливо:

$$(i) A \cup B = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i) \left[\begin{array}{l} \text{Если } \exists i (a_i \cup b_i = *) \\ \text{, то } A \cup B = U; \end{array} \right.$$

$$(ii) A \cap B = \left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array} \left[\supseteq \right] \bigcap_{i=1}^n (a_i, b_i) \right];$$

$$(iii) A \subseteq B, \text{ если и только если } \forall i (a_i \subseteq b_i).$$

S4) Для C -кортежа A и D -кортежа B справедливо:

$$A \subseteq B, \text{ если и только если } \exists i (a_i \subseteq b_i).$$

S5) Для C -систем A, B справедливо:

$$(i) A \cup B = \left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right];$$

(ii) $A \cap B$ эквивалентно C -системе, содержащей все непустые C -кортежи, получающиеся при пересечении каждого C -кортежа первой C -системы с каждым C -кортежем второй.

S6) Для C -системы A и C -кортежа B справедливо:

$$A \subseteq B, \text{ если и только если } \forall k (a_{k*} \subseteq B).$$

S7) Для C -системы A и D -системы B справедливо:

$$A \subseteq B, \text{ если и только если } \forall i \forall k (a_{i*} \subseteq b_{k*}).$$

S8) Преобразование D -кортежа A в C -систему B осуществляется с помощью преобразования каждой непустой компоненты a_i в C -кортеж b_{i*} , такой, что в нем в соответствующей координате содержится компонента a_i , а все остальные координаты содержат константу *. Во многих случаях целесообразно преобразование D -кортежа в C -систему с попарно ортогональными (непересекающимися) C -кортежами, например

$$]P \emptyset Q S[= \left[\begin{array}{cccc} P & * & * & * \\ * & * & Q & * \\ * & * & * & S \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} P & * & * & * \\ \overline{P} & * & Q & * \\ \overline{P} & * & \overline{Q} & S \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} * & * & Q & * \\ * & * & \overline{Q} & S \\ P & * & \overline{Q} & \overline{S} \end{array} \right].$$

При условии, что все покомпонентные операции и сравнения реализуются с помощью алгоритма полиномиальной сложности, все приведенные выше операции и сравнения над TA -объектами реализуются также с помощью алгоритмов полиномиальной сложности. Более сложными в этом отношении являются такие операции, как проверка включения C -кортежа в C -систему, проверка выполнимости D -системы, преобразование D -системы в C -систему и некоторые другие. Число элементарных (покомпонентных) операций, необходимых для их реализации, во многом зависит от структурных особенностей исходных TA -объектов. Распознавание этих структурных особенностей относительно просто осуществляется с помощью матричных свойств

TA -объектов, о которых речь впереди.

Теорема 1. Пусть A и B — некоторые формулы системы класса RS , а T_A и T_B — их эквиваленты в TA . Тогда верны следующие соответствия:

- 1) $A \wedge B \Leftrightarrow T_A \cap T_B$;
- 2) $A \vee B \Leftrightarrow T_A \cup T_B$;
- 3) $\sim A \Leftrightarrow \overline{T_A}$;
- 4) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{T_A} \cup T_B$;
- 5) A общезначима $\Leftrightarrow T_A = U(T_A)$;
- 6) $A \rightarrow B$ общезначимо $\Leftrightarrow T_A \subseteq T_B$;
- 7) A выполнима $\Leftrightarrow T_A \neq \emptyset$;
- 8) A невыполнима $\Leftrightarrow T_A = \emptyset$.

Доказательство всех соответствий легко выводится из интерпретации логических операций в исчислении предикатов [4]. Соответствие 6 является следствием соответствия 4: $\overline{T_A} \cup T_B$ равно универсуму, если и только если $T_A \subseteq T_B$.

Эквивалентность двух TA -объектов A и B может быть определена с помощью двух проверок $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Определим TA как алгебру $TA = \langle FU, \cup, \cap, - \rangle$, в которой каждый элемент является TA -объектом, сформированным на основе гибкого универсума FU .

Теорема 2. TA изоморфна булевой алгебре.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Поскольку D -системы в TA соответствуют КНФ в RS , то под выполнимостью D -системы подразумевается выполнимость соответствующей ей КНФ. При этом выполняющей подстановкой D -системы может быть не только элементарный кортеж, но любые C -кортеж или C -система, полученные при успешном перечислении этой D -системы. Если D -система преобразуется в непустую C -систему, то она выполнима, в противном случае – невыполнима.

Рассмотрим, как в структурах TA отображается система исчисления высказываний. В этой системе FU состоит из одного сорта $S = \{0, 1\}$ и произвольного множества координат $\{X_i\}$.

Множество всех возможных компонент в каждом кортеже исчерпывается четырьмя возможными значениями $\{0, 1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, \emptyset , которые в примерах будем обозначать соответственно $*$, 0 , 1 и \emptyset . Компоненте $*$ соответствует в исчислении высказываний константа $TRUE$, компоненте \emptyset – константа $FALSE$, а компонентам 1 и 0 – соответственно литералы x_i и $\sim x_i$. С учетом этого в системе, содержащей в схеме отношения 4 координаты (X_1, X_2, X_3, X_4) , конъюнкт $(x_2 \wedge \sim x_4)$ можно представить как C -кортеж $C = [* 1 * 0]$, а дизъюнкт $(\sim x_2 \vee x_4)$ – как D -кортеж $D =]\emptyset 0 \emptyset 1[$. При этом множество элементарных кортежей, принадлежащих C -кортежу C , равно декартовому произведению компонент, т.е. $\{0, 1\} \times \{1\} \times \{0, 1\} \times \{0\} = \{0100, 0110, 1100, 1110\}$. Множество элементарных кортежей D -кортежа D можно перечислить с помощью C -системы $\begin{bmatrix} * & 0 & * & * \\ * & 1 & * & 1 \end{bmatrix}$ с попарно ортогональными кортежами.

3. Матричные свойства TA -объектов

Матричные свойства TA -объектов справедливы как для систем, моделирующих задачи исчисления высказываний, так и для более сложных систем. В данном разделе будем использовать в качестве примеров TA -объекты, представляющие системы исчисления высказываний.

Очевидно, что любая перестановка строк C - или D -системы является эквивалентным преобразованием. Перестановка столбцов матрицы системы также является эквивалентным преобразованием, если при этом производится соответствующая перестановка координат в схеме отношения. Эквивалентность таких преобразований объясняется коммутативностью операций конъюнкции и дизъюнкции в RS и соответствующих им операций пересечения и объединения в TA .

Пусть L_p есть подмножество множества L координат для произвольного TA -объекта T со схемой отношения $T(L)$. Проекцией $pr(L_p)$ TA -объекта T является TA -объект, состоящий из множества L_p координат TA -объекта T . Подсистемой C - или D -системы называется система того же класса, содержащая некоторое подмножество кортежей исходной системы. Блоком является подсистема некоторой проекции TA -объекта.

Если компоненты произвольного D -кортежа D разбиты на R подмножеств компонент так, что их объединение равно полному набору компонент кортежа D и из этих подмножеств сформированы D -кортежи D_i , то

$$(1) \quad \bigcup_{i=1}^R D_i = D.$$

Аналогично для C -кортежей при тех же условиях разбиения верно

$$\bigcap_{i=1}^R C_i = C.$$

Матрицу DS размерности $M \times N$, представляющую какую-либо D -систему, разобьем с помощью вертикальных линий на R вертикальных блоков. Пусть $N(R)$ – множество $\{1, 2, \dots, R\}$, а множество $D(R, M)$ – декартово произведение $N(R)^M$, элементами которого являются M -размещения с повторениями элементов из множества $N(R)$. Так, если $N(R) = \{1, 2\}$, а $M = 3$, то $D(R, 3) = N(R)^3 = \{111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222\}$. Для этих условий справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. При разбиении матрицы D -системы DS размерности $M \times N$ на R вертикальных блоков справедливо равенство

$$(2) \quad DS = \bigcup_{k \in D(R, M)} \left(\bigcap_{i=1}^M D_{ij} \right),$$

где D_{ij} – D -кортеж представленный подстрокой i -й строки, взятой из j -го блока матрицы DS , а индекс j в подформуле $\bigcap_{i=1}^M D_{ij}$ пробегает последовательно все значения соответствующего элемента $k \in D(R, M)$.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Из теоремы 3, в частности, следует, что D -система выполнима, если выполнима хотя бы одна D -система $\bigcap_{i=1}^M D_{ij}$ при любом разбиении на вертикальные блоки.

Рассмотрим некоторые следствия из этой теоремы, которые можно использовать при решении конкретных задач. Преобразуем матрицу D -системы DS в блочную матрицу T размерностью $S \times R$. Элементы этой матрицы являются подматрицами исходной матрицы и в зависимости от размерности представляют либо D -системы, либо D -кортежи, либо компоненты D -кортежей системы. Если элемент T_{ij} блочной матрицы T является вектор-столбцом, то его можно преобразовать в компоненту, значением которой является пересечение всех компонент вектора-столбца. Это допустимо потому, что эти компоненты соответствуют одной координате. Например, матрица системы

$$S = \left\| \begin{array}{ccc|c} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ \hline s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \end{array} \right\| \quad \text{соответствует блочной матрице}$$

$$T = \left\| \begin{array}{cc} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{array} \right\|.$$

Если матрица S представляет D -систему, то блок T_{11} соответствующей блочной матрицы T является D -системой размерности 2×3 , блок T_{21} – D -кортежем $]s_{31} \ s_{32} \ s_{33}[$, блок T_{22} – компонентой s_{34} , а блок T_{12} можно представить как компоненту, равную $s_{14} \cap s_{24}$. Введем некоторые определения.

Конфликтующей парой D -системы называется непересекающаяся пара непустых компонент одной координаты. *Конфликтной координатой* называется координата D -системы, в которой пересечение всех непустых компонент пусто, в противном случае координата называется *бесконфликтной*. *Бесконфликтной проекцией* D -системы ($prNC$) называется ее проекция, содержащая только бесконфликтные координаты. Соответственно проекция с конфликтными координатами называется *конфликтной проекцией* (prC).

Монотонной координатой D -системы называется бесконфликтная координата, не содержащая пустых компонент. *Монотонной проекцией* (prM) называется бесконфликтная проекция, не содержащая D -кортежей со всеми пустыми компонентами.

Теорема 4. Если D -система содержит монотонную проекцию, то она выполнима. Доказательство теоремы приведено в приложении.

Пример. Дана D -система $DS = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & 0 \\ \emptyset & 1 & \emptyset \\ 1 & \emptyset & 1 \end{bmatrix}$. Первые две координаты DS

являются монотонной проекцией, $C_{int} = [1 \ 1 \ *]$, следовательно, DS выполнима, а C_{int} - выполняющая подстановка.

Если D -система представлена как блочная матрица с элементами T_{ij} , то *диагональю* блочной матрицы называется множество элементов T_{ij} , таких, что значения i пробегает все номера строк, а среди значений j нет повторяющихся элементов. Очевидно, что диагональ можно определить только для блочных матриц, у которых количество строк (S) и количество столбцов (R) связаны отношением $S \leq R$.

Теорема 5. Если в блочной матрице, представляющей D -систему, существует диагональ, все элементы которой выполнимы, то D -система выполнима.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Рассмотрим, как можно использовать эту теорему для распознавания сокращаемых D -систем. Пусть D -система DS содержит бесконфликтную проекцию $T_1 = prNC(DS)$. Тогда после соответствующих перестановок строк и столбцов DS

можно представить как блочную матрицу $DS = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$, где T_{11} - подсистема

T_1 , не содержащая D -кортежей со всеми пустыми компонентами, T_{21} - подсистема T_1 с D -кортежами, содержащими только пустые компоненты. Тогда очевидно, что DS выполнима, если выполнима T_{22} . Это следует из того, что D -система T_{11} монотонна и, следовательно, выполнима, а совокупность элементов T_{11} и T_{22} является диагональю. В свою очередь T_{22} можно также проверить на существование бесконфликтной проекции и, если она существует, то реализовать на ней ту же процедуру преобразования. Ясно, что эта процедура позволяет выделить новый класс выполнимых D -систем, распознаваемых с помощью алгоритма полиномиальной сложности.

Пример. Пусть задана D -система $DS = \begin{bmatrix} \emptyset & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \emptyset & 0 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ 0 & \emptyset & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Вторая координата у D -системы DS бесконфликтная, следовательно, эту систему можно после соответствующей перестановки строк и столбцов преобразовать в систему, представимую в виде блочной матрицы

$$DS_k = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & \emptyset & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & 0 & 0 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 & 1 \\ \emptyset & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему $T_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \emptyset \\ \emptyset & 1 & 1 \\ \emptyset & 1 & \emptyset \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. В этой системе бесконфликтными

являются 1-я и 3-я координаты, т.е. ее в свою очередь можно преобразовать в

блочную матрицу $T^1 = \begin{bmatrix} 0 & \emptyset & 0 \\ \emptyset & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$, у которой блок t_{22} , равный

компоненте $\{1\}$, является выполнимым. Если возьмем выполняющие подстановки D -систем T_{11}, t_{11} и t_{22} , равные соответственно C -кортежам $[0 * * *]$, $[* 0 1 *]$ и $[* * * 1]$, и найдем их пересечение, то получим выполняющую подстановку $[0 0 1 1]$. С учетом перестановки столбцов при преобразованиях выполняющей подстановкой системы DS будет C -кортеж $[0 0 1 1]$. Разумеется, найденное таким способом решение не всегда является полным множеством выполняющих подстановок.

Стоит отметить, что рассмотренная выше процедура преобразования D -системы в блочную матрицу определяет не только необходимое, но и достаточное условие выполнимости этой системы.

Теорема 6. Если D -система содержит бесконфликтную немонотонную проекцию, то она эквивалентна по выполнимости D -системе T_{22} .

Доказательство теоремы приведено в приложении.

4. Алгоритм решения задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ КНФ

Рассмотрим сначала алгоритм проверки включения C -кортежа C в C -систему CS . В классе RS этой задаче соответствует задача проверки покрытия конъюнкта некоторой ДНФ. Рассмотрим этот алгоритм для систем, моделирующих задачи исчисления высказываний.

Алгоритм проверки $C \subseteq CS$ для исчисления высказываний

- 1) Вычислить $CS_0 = C \cap CS$.
- 2) Если $CS_0 = \emptyset$, то выход с ответом "нет".
- 3) Если существует C -кортеж $C_k \in CS_0$, такой, что $C_k = C$, то выход с ответом "да".
- 4) Если CS_0 содержит один C -кортеж, то выход с ответом "нет".
- 5) В системе CS_0 выделить проекцию CS_0^* , координаты которой соответствуют координатам C -кортежа C , равным $*$.
- 6) Проверить выполнимость D -системы $\overline{CS_0^*}$; если она выполнима, то ответ "нет", в противном случае – "да".

Ясно, что в этом алгоритме все шаги, кроме 6-го, выполняются с помощью алгоритмов полиномиальной сложности.

Рассмотрим пример.

$$\text{Пусть } C = [0 * 1 * 0], \text{ а } CS = \begin{bmatrix} * & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 1 & 0 \\ 0 & * & 1 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

$$1) CS_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & * & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

2) – 4) – условия не выполняются;

$$5) CS_0^* = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \\ * & 1 \end{bmatrix} \text{ (из } CS_0 \text{ выбрана проекция, соответствующая 2-й и 4-й координате, которые в } C \text{ представлены компонентами *)};$$

$$6) \overline{CS_0^*} = \begin{bmatrix} 0 & \emptyset \\ 1 & 0 \\ \emptyset & 0 \end{bmatrix}; \text{ система выполнима; ответ: "нет".}$$

Нетрудно убедиться, что в этом алгоритме решение задачи проверки включения C -кортежа в C -систему в худшем случае сводится к решению задачи "выполнимость КНФ", причем размерность проверяемой на выполнимость системы меньше размерности исходной C -системы.

Рассмотрим обоснование корректности алгоритма. Шаги 1) – 4) очевидны и являются следствием утверждений S_2 и S_5 . В системе CS_0 проекция, соответствующая неполным компонентам кортежа C , состоит только из компонент, равных компонентам этого кортежа (отметим, что для систем с произвольными координатами это равенство может не соблюдаться). В кортеже C в координатах, представленных компонентой $*$, допустима любая подстановка, следовательно, эта проекция в CS_0 должна быть равна универсуму, а ее дополнение, т.е. соответствующая D -система, невыполнимо. Тем самым обосновывается корректность шагов 5 и 6 алгоритма.

Очевидно, что если ставится задача проверки включения C -системы CS_1 в C -систему CS_2 , то эту задачу можно свести к задаче проверки включения каждого C -кортежа системы CS_1 в C -систему CS_2 . Положительный ответ получается лишь в том случае, если все эти проверки успешны.

Алгоритм решения задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ КНФ нетрудно свести к задаче проверки включения C -системы в C -систему. Пусть D -система DS содержит множество D -кортежей $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$. Выберем какой-нибудь D -кортеж (например, D_1) и сделаем следующее преобразование:

$$D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_m = D_1 \cap \overline{\overline{D_2} \cup \dots \cup \overline{D_m}} = D_1 \setminus (\overline{D_2} \cup \dots \cup \overline{D_m}).$$

Подвыражение $CS_1 = \overline{D_2} \cup \dots \cup \overline{D_m}$ является C -системой. D_1 также может быть преобразовано в C -систему CS_0 (см. утверждение S_8). Таким образом, исходная D -система преобразуется в формулу $CS_0 \setminus CS_1$. Для проверки выполнимости этой D -системы достаточно проверить включение $CS_0 \subseteq CS_1$, тогда при положительном ответе $CS_0 \setminus CS_1 = \emptyset$, а при отрицательном – $CS_0 \setminus CS_1 \neq \emptyset$.

При проверке включения некоторых C -кортежей системы CS_0 в систему CS_1 мы можем достигнуть шага 6 приведенного выше алгоритма – в этом случае необходимо проверить выполнимость промежуточной D -системы DS_r . Эту проверку можно также осуществить, используя преобразование $DS_r = CS_{r0} \setminus CS_{r1}$.

Ясно, что в этом алгоритме осуществляется обход дерева решения, причем в каждом последующем узле происходит сокращение предшествующей D -системы, по крайней мере на один D -кортеж и по крайней мере на одну координату. Процедура завершается, если

(i) проверка включения хотя бы одного C -кортежа $C_{r0} \in CS_{r0}$ в CS_{r1} окажется безуспешной – в этом случае исходная D -система выполнима;

(ii) все проверки оказались успешными – D -система невыполнима.

Докажем корректность алгоритма. Если в каком-либо узле дерева решения окажется, что проверка включения очередного C -кортежа C_{r0} в C -систему CS_{r1} безуспешна, то это означает, что в CS_0 содержится какое-то множество элементарных кортежей, которое не включено в CS_1 . Следовательно, $CS_0 \setminus CS_1 = DS \neq \emptyset$. С другой стороны, если все проверки успешны, то $CS_0 \subseteq CS_1$ и, следовательно, $CS_0 \setminus CS_1 = DS = \emptyset$.

Пример. Дана D -система $DS = \begin{bmatrix} 0 & \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \emptyset & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 1 & 1 & \emptyset \end{bmatrix}$. Проверить ее выполнимость.

Выберем 1-й D -кортеж $]0 \emptyset 1 \emptyset[$ и преобразуем его в C -систему с попарно ортогональными кортежами $CS_0 = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ 1 & * & 1 & * \end{bmatrix}$. C -система CS_1 будет равна соответ-

ственно $\begin{bmatrix} * & 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & * & * \\ 1 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$. Если найти пересечение первого кортежа $C_{10} = [0 * * *]$

с CS_1 , то получится C -система $CS_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и приходим к проверке на выполнимость D -системы $DS_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \emptyset & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Если удастся установить, что эта D -система выполнима, то можно завершить алгоритм с ответом: DS выполнима.

Алгоритм позволяет не только ответить на вопрос о выполнимости D -системы, но и определить выполняющую подстановку в случае ее выполнимости. Для этого надо выбрать все C -кортежи, проверяемые на пути к выполнимой D -системе, найти их пересечение, после чего найти пересечение полученного C -кортежа с какой-либо выполняющей подстановкой D -системы, полученной на завершающем шаге. Так, для нашего примера выполняющими подстановками для DS_{11} являются C -кортежи $[1 \ 1 \ *]$, $[1 \ * \ 0]$ и т.д. Их пересечение с C -кортежем C_{10} с учетом соответствия координат в схемах отношений даст C -кортежи $[0 \ 1 \ 1 \ *]$, $[0 \ 1 \ * \ 0]$, ..., которые и являются выполняющими подстановками D -системы DS . Рассмотрим некоторые методы ускорения этого алгоритма, которые реализуются при просмотре промежуточных D -систем, получаемых в узлах дерева решения.

1. *Проверка на сокращаемость.* Сокращение размерности матрицы D -системы может быть достигнуто за счет распознавания бесконфликтных проекций (см. теорему 6) или же включенных в нее D -кортежей, содержащих только одну непустую компоненту. В этих случаях сокращение размерности реализуется без разветвления дерева решения.

2. *Проверка на полиномиальную разрешимость.* Если промежуточная D -система разрешима за полиномиальное время, то данный узел дерева решения можно рассматривать как лист. Критериями полиномиальной разрешимости могут, в частности, быть следующие: 1) существование монотонной проекции (см. теорему 4); 2) существование D -кортежа со всеми пустыми компонентами; 3) наличие во всех D -кортежах не более двух непустых компонент (это соответствует полиномиально разрешимой задаче 2-ВЫПОЛНИМОСТЬ). Возможны также и другие известные критерии распознавания полиномиальной разрешимости [5].

3. *Выбор ведущего D -кортежа.* При выполнении шага 1 алгоритма проверки включения C -кортежа в C -систему часто происходит сокращение числа кортежей в C -системе. Интенсивностью этого сокращения можно управлять с помощью выбора D -кортежа, преобразуемого в C -систему CS_{r_0} , т.е. *ведущего D -кортежа*. Пусть в координате X_i D -системы DS_r содержится $K_i(1)$ компонент 1 и $K_i(0)$ компонент 0. Если выбранный D -кортеж D_{r_0} содержит в координате X_i непустую компоненту t и эта компонента без изменения переходит в один из C -кортежей C -системы CS_{r_0} , то при пересечении этого C -кортежа с C -системой CS_{r_1} удаляется не менее $K_i(t) - 1$ C -кортежей, так как в C -системе CS_{r_1} все компоненты оставшихся D -кортежей инвертируются, а пересечение C -кортежей, содержащих в одной координате разные непустые компоненты, дает в результате пустой кортеж.

Пусть для каждой координаты X_i вычислен вес W_i координаты, такой, что $W_i = \max(K_i(0), K_i(1))$ и выбрана непустая компонента $t_i \in \{0, 1\}$, такая, что $K_i(t_i) = W_i$. Выберем вначале в DS_r координату X_m с максимальным весом, а среди множества D -кортежей — D -кортежи, содержащие компоненту t_m . Среди полученного множества D -кортежей можно выбрать, используя аналогичную процедуру, новое множество кортежей и так далее до окончательного выбора ведущего D -кортежа. Выбранный таким образом D -кортеж D_{r_0} преобразуем в C -систему CS_{r_0} с попарно ортогональными кортежами так, чтобы это преобразование соответствовало распределению весов соответствующих компонент D -кортежа D_{r_0} . Например, если для выбранного D -кортежа $]1 \ \emptyset \ 0 \ 1[$ распределение весов для непустых компонент равно

$(3, 5, 1)$, то его целесообразно преобразовать в C -систему $\begin{bmatrix} * & * & 0 & * \\ 1 & * & 1 & * \\ 0 & * & 1 & 1 \end{bmatrix}$, в которой

координате с максимальным весом соответствует наибольшее число вхождений неполных компонент. Очевидно, что при таком выборе сокращение числа C -кортежей в C -системе CS_{r_1} при пересечении с C -системой CS_{r_0} будет, как правило, более интенсивным, чем при произвольном выборе.

5. Оценка вычислительной сложности алгоритма

Поскольку рассмотренный в предыдущем разделе алгоритм является одной из модификаций метода ветвей и границ, то предполагается, что в общем случае его вычислительная сложность экспоненциальная. Однако можно выделить некоторые классы индивидуальных задач, для которых применение этого алгоритма приводит к полиномиальной оценке его сложности. Эти классы в отличие от известных классов полиномиальной сводимости являются не структурными, а статистическими.

Рассмотрим класс UD равномерно распределенных D -систем, у которых множество символов $\{0, 1, \emptyset\}$ с равной вероятностью равномерно распределено по матрице D -системы. Более широким классом является класс DD плотных D -систем, у которых компонента \emptyset равномерно распределена с вероятностью не более $1/3$, а распределение компонент 0 и 1 произвольно.

Теорема 7. Класс индивидуальных задач выполнимости, соответствующих классу UD D -систем, является полиномиально разрешимым в среднем.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

При решении практических задач класса DD с использованием методов ускоренной реализации время решения, как правило, оказывается меньше, чем время решения аналогичных задач класса UD . Это объясняется тем, что в задачах класса DD более вероятны промежуточные D -системы, у которых содержатся монотонные или бесконфликтные проекции. Кроме того, в задачах класса DD относительный вес координат может превышать среднюю оценку, что приводит к более интенсивному сокращению последующих D -систем, если рассматривать координаты независимо друг от друга. Однако в классе DD совместное распределение непустых компонент в разных координатах в общем случае не является независимым. Это означает, что возможны случаи, когда при выборе ведущего D -кортежа по координате с максимальным весом будет получено такое множество кортежей, среди которых не найдется компонент t , таких, что $K_j(t) = W_j$. Для таких случаев можно предусмотреть несколько вариантов выбора ведущего D -кортежа, однако это не позволяет считать, что доказательство теоремы 7 для данного класса является корректным. Таким образом, проблема доказательства полиномиальной сводимости для задач полного класса DD пока что остается открытой.

6. Выводы и рекомендации

Учитывая, что при обосновании вычислительной сложности алгоритма был введен ряд упрощений, значительно ухудшающих оценку сложности (соответствие количества узлов количеству элементов, доказательство без учета всех возможностей методов ускоренной реализации и др.), можно предположить, что при решении практических задач

- 1) время решения окажется меньше теоретически ожидаемого;
- 2) средняя оценка сложности алгоритма для задач класса UD окажется верхней оценкой;
- 3) полиномиально решаемыми окажутся многие задачи, выходящие за пределы класса UD , т.е. задачи с неравномерным распределением символов или задачи с большей вероятностью вхождения символа \emptyset .

Классы UD и DD относятся к сравнительно малоисследованным классам КНФ с точки зрения полиномиальной распознаваемости выполнимости. В этом отношении

более внимательно изучались классы КНФ "разреженного" типа. Среди этих классов можно выделить рассмотренные в работах Е. Я. Данцина [5, 6] полиномиальные классы КНФ, распознаваемые на основе анализа графа переменных.

С точки зрения оптимистического подхода к решению проблемы $P = NP$, очевидно, имеет смысл исследовать более внимательно промежуточные классы КНФ, для которых полиномиальная распознаваемость, возможно, решается с применением комбинированных методов, в которых сочетается распознавание статистических свойств TA -объектов и структурных особенностей графа переменных.

Установлено, что в подходе к решению задач искусственного интеллекта на основе TA определяющими являются матричные свойства. Поэтому термин "алгебра кортежей" не вполне точно отражает суть этого подхода, и здесь, видимо, более уместен термин "матричная логика".

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. *Доказательство теоремы 2.* Известно, что булевой алгеброй является дистрибутивная структура T с нулем (0) и единицей (1), в которой для любого элемента $C \subseteq T$ существует обратный элемент \bar{C} , такой, что $C \cap \bar{C} = 0$ и $C \cup \bar{C} = 1$. Операции \cup и \cap в TA дистрибутивны. Нулем в TA является пустое множество (\emptyset), а единицей — C -кортеж $[* * \dots *]$, в котором все координаты, за исключением одной, фиктивные, а это означает, что все частные универсумы эквивалентны единице (*). Следовательно, для любого элемента C в TA справедливо $C \cap \bar{C} = \emptyset$ и $C \cup \bar{C} = *$.

2. *Доказательство теоремы 3.* Пусть $D_i (i = \overline{1, M})$ — D -кортеж, представленный i -й строкой матрицы DS . Тогда $DS = \bigcap_{i=1}^M D_i$. При разбиении на R вертикальных блоков это равенство с использованием (1) преобразуется в равенство $DS = \bigcap_{i=1}^M \left(\bigcup_{j=1}^R D_{ij} \right)$, где D_{ij} — D -кортеж, представленный подстрокой i -й строки, принадлежащей j -му блоку. Если в этом равенстве раскрыть скобки, то получим соотношение, сформулированное в теореме.

3. *Доказательство теоремы 4.* Рассмотрим C -кортеж C_{int} , в котором все компоненты монотонной проекции prM D -системы DS равны пересечению всех непустых компонент DS в соответствующей координате, а все остальные компоненты равны *. Для каждого D -кортежа D_k системы DS в соответствии с утверждением $S4$ верно $C_{int} \subseteq D_k$. Следовательно, пересечение всех D_k непусто и содержит все элементарные кортежи, содержащиеся в C_{int} .

4. *Доказательство теоремы 5.* Рассмотрим множество $\{T_{ij}\}$ из S элементов блочной матрицы $T (i = \overline{1, S}, \text{ а индексы } j \text{ попарно не совпадают})$. Это множество является диагональю блочной матрицы. Ясно, что выражение $\bigcap_{i=1}^S T_{ij}$ эквивалентно одному из пересечений выражения (2). Если все T_{ij} этой диагонали выполнимы, то для каждого из них существует C -кортеж C_{ij} , являющийся выполняющей подстановкой T_{ij} . Поскольку схемы отношений этих C -кортежей содержат попарно непесекающиеся множества координат, то пересечение этих кортежей непусто. Следовательно, этот непустой C -кортеж является выполняющей подстановкой D -системы DS .

5. *Доказательство теоремы 6.* Необходимость следует из процедуры преобразования D -системы в блочную матрицу и теоремы 5. Докажем достаточность. Предположим, что T_{22} невыполнима, а DS выполнима. Рассмотрим формулу (2). Ясно, что все ее подформулы типа $\bigcap_{i=1}^M D_{ij}$, содержащие хотя бы один D -кортеж из блока T_{21} , невыполнимы, так как все D -кортежи в этом блоке пустые. Таким образом, выполнимые подформулы должны содержать все D -кортежи из блока T_{22} . Поскольку

T_{22} невыполнимо, то среди этих подформул нет ни одной выполнимой. Полученное противоречие доказывает теорему.

6. *Доказательство теоремы 7.* Пусть рассмотренный алгоритм применяется к D -системе класса UD размерности $M \times N$, где M – множество D -кортежей, а N – множество координат. Ясно, что глубина дерева решения ограничена величиной M , так как в каждом последующем узле из промежуточной D -системы изымается по крайней мере один D -кортеж. Обработка каждого узла дерева решения выполняется с помощью алгоритма полиномиальной сложности даже при применении методов ускоренной реализации. Следовательно, теорема будет доказана, если будет доказано, что общее число узлов на каждом уровне не превышает величины, определяемой полиномом ограниченной степени от размерности задачи.

Другая основная идея доказательства заключается в том, что вместо трудно реализуемой оценки числа узлов оценивается общее число элементов (D -кортежей) на уровнях по мере увеличения глубины дерева. Ясно, что общее число узлов не может быть больше этой величины.

Рассмотрим промежуточную D -систему DS_r , содержащую L D -кортежей. Выберем ведущий кортеж D_{r_0} , содержащий $n > 2$ непустых компонент, и преобразуем его в C -систему CS_{r_0} с n попарно непересекающимися кортежами. Эти C -кортежи содержат соответственно $1, 2, \dots, n$ неполных компонент. Оставшееся множество D -кортежей D -системы DS_r с помощью инвертирования преобразуется в C -систему CS_{r_1} , содержащую $L - 1$ кортежей. Пусть P_n – проекция CS_{r_1} , в которой содержатся только координаты, соответствующие непустым компонентам D -кортежа D_{r_0} . Ясно, что элиминация C -кортежей при пересечении любого C -кортежа из CS_{r_0} с C -системой CS_{r_1} активизируется только в пределах проекции P_n . В этой проекции возможны 3^n различных вариантов C -кортежей (число сочетаний по n с повторениями для множества $\{0, 1, *\}$ символов).

Пусть $C_k \in CS_{r_0}$ – C -кортеж, содержащий ровно k ($k \leq n$) неполных компонент. Если $k = 1$ и в C_1 содержится одна неполная компонента t в координате X_i , то среди различных вариантов C -кортежей проекции P_n содержатся $2 \cdot 3^{n-1}$ вариантов, содержащих компоненты t или $*$ в координате X_i . Следовательно, при равномерном распределении множества символов $\{0, 1, *\}$ пересечение $C_1 \cap CS_{r_1}$ даст в среднем $2/3(L - 1)$ непустых кортежей. Соответственно для любого k существует $2^k \cdot 3^{n-k}$ различных вариантов C -кортежей в проекции P_n , не содержащих компонент, альтернативных соответствующим неполным компонентам C -кортежа C_k и, следовательно, дающих в среднем $(2/3)^k(L - 1)$ непустых пересечений C -кортежа C_k с C -системой CS_{r_1} . Следовательно, при пересечении $CS_{r_0} \cap CS_{r_1}$ число непустых C -кортежей в среднем равно

$$(3) \quad S = (L - 1) \sum_{k=1}^n 2^k \cdot 3^{-k} = (L - 1) \left(2 - \frac{2^{n+1} - 1}{3^n} \right) < 2(L - 1).$$

Пусть $f(r)$ – функция изменения числа элементов (C - или D -кортежей) по глубине r дерева решения и из начальной D -системы DS извлекается ведущий кортеж, содержащий k_1 непустых компонент. Тогда с учетом (3) $f(1) = 2(M - 1)$. Полученное множество элементов разделяется на k_1 промежуточных D -систем и из каждой из них извлекается один ведущий D -кортеж. Тогда $f(2) = 2(2(M - 1) - k_1)$. Аналогично $f(3) = 2 \left(2(2(M - 1) - k_1) - \sum_i k_{2i} \right)$, где k_{2i} – число непустых компонент в ведущих кортежах, выделенных из соответствующих D -систем 2-го уровня. Произведем еще одно упрощение. Ясно, что если из промежуточной D -системы невозможно извлечь D -кортеж, содержащий три или более компоненты, то соответствующий узел является конечным, так как текущая D -система относится к полиномиально разрешимому классу. Следовательно, оценка $f(r)$ не уменьшится, если примем все k_{ij} на всех уровнях равными трем. Тогда получим

$$(4) \quad f(r) = 2(f(r-1) - 3^{r-1}) = 2^r M - \sum_{i=0}^{r-1} 3^i 2^{r-i} = 2^r(M+2) - 2 \cdot 3^r.$$

Ясно, что по мере увеличения r функция $f(r)$ имеет один максимум. Чтобы его определить, возьмем частную производную

$$\frac{d(f(r))}{dr} = 2^r(M+2) \ln 2 - 2 \cdot 3^r \ln 3$$

и приравняем ее нулю. Тогда получим $2^r \ln 2(M+2) = 2 \cdot 3^r \ln 3$ или равносильное равенство $r + \log_2(\ln 2) + \log_2(M+2) = 1 + r \log_2 3 + \log_2(\ln 3)$. Отсюда

$$r_{\max} = \frac{\log_2(M+2) + \log_2(\ln 2) - \log_2(\ln 3) - 1}{\log_2 3 - 1} \approx 1,71 \log_2(M+2) - 2,85.$$

При подстановке этого значения в (4) получим, что число узлов дерева решения не превышает в среднем величины, которая оценивается полиномом не выше третьей степени от числа D -кортежей в исходной D -системе. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулик Б.А. Система логического программирования на основе алгебры кортежей // Техн. кибернетика. 1993. № 3. С. 226-239.
2. Кук С.А. Сложность процедур вывода теорем // Кибернетический сб. Новая серия. 1975. Вып. 12. С. 5-15.
3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
5. Данцин Е.А. Алгоритмика задачи выполнимости // Вопросы кибернетики. Проблемы сокращения перебора. М., 1987. С. 7-29.
6. Данцин Е.А. Две системы доказательства тавтологичности, основанные на методе расщеплений // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1981. Т. 105. С. 24-44.

Поступила в редакцию 09.07.93