andr_lux@mail.ru

Автоматизированные построения в математике

Люксембург Андрей Анатольевич

- В математике можно понятия последовательно определять через другие.
- Впервые несколько тысяч лет назад геометрия Евклида. Логика. Формальные доказательства. Сигнатура. Аксиоматика.
- Много понятий не в системе аксиом и сигнатуре . Как они устроены? Как устроены теоремы? Методы доказательств?
- Историческое развитие математики. Топологии 100 лет. Вместо метрики понятие близости, привело к созданию новой теории. Развитие математики при обучении для школьника студента. Многие понятия кажутся неестественными надуманными.
- 6 класс информатика. Род, вид понятия, объём содержания понятия, операции над понятиями.
- Анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение. FCA.
- Неевклидовы геометрии. Лобачевского, через одну точку бесконечное количество параллельных. Геометрия Римана, любые две прямые пересекаются. Сферическая, через два полюса бесконечное количество прямых. В сферической геометрии нет предиката «между» для трёх точек на прямой. Конечные геометрии.

Евклидова геометрия

- Аксиомы принадлежности точек и прямых
- Понятие отрезка. Предикат между.
- Понятие окружности. Понятия чертежа.
- Теория доказательств (Как доказать теорему Пифагора?)
- Аналитическая геометрия. Алгоритм Тарского. Разрешимость евклидовой геометрии.

Математические теории

- Геометрия Евклида
- Арифметика Пеано
- Теория множеств
- Теория групп
- Теория графов
- Топология

- Объекты, определения, аксиомы, теоремы, леммы, задачи, доказательства

Автоматизация в математике

- Численные преобразования, вычисления
- Аналитические (символьные)
- Решение задач
- Доказательство теорем

- MathCad, MatLab, Maple, Matematica,
- GAP, MIZAR
- Пруверы: SPASS, Coq, Vampire, САД, Microsoft Z3
- Методы формального доказательства:

Натуральный вывод (Генцен)

Обратный метод (Маслов)

Метод резолюций (Робинсон)

Метод аналитических или семантических таблиц (Бет, Смалиан)

Понятия теории

- Теория графов

Путь, цикл, вершина, ребро, степень вершины

- Теория групп

Центр группы, класс смежности, орбита, централизатор, факторгруппа, образующие

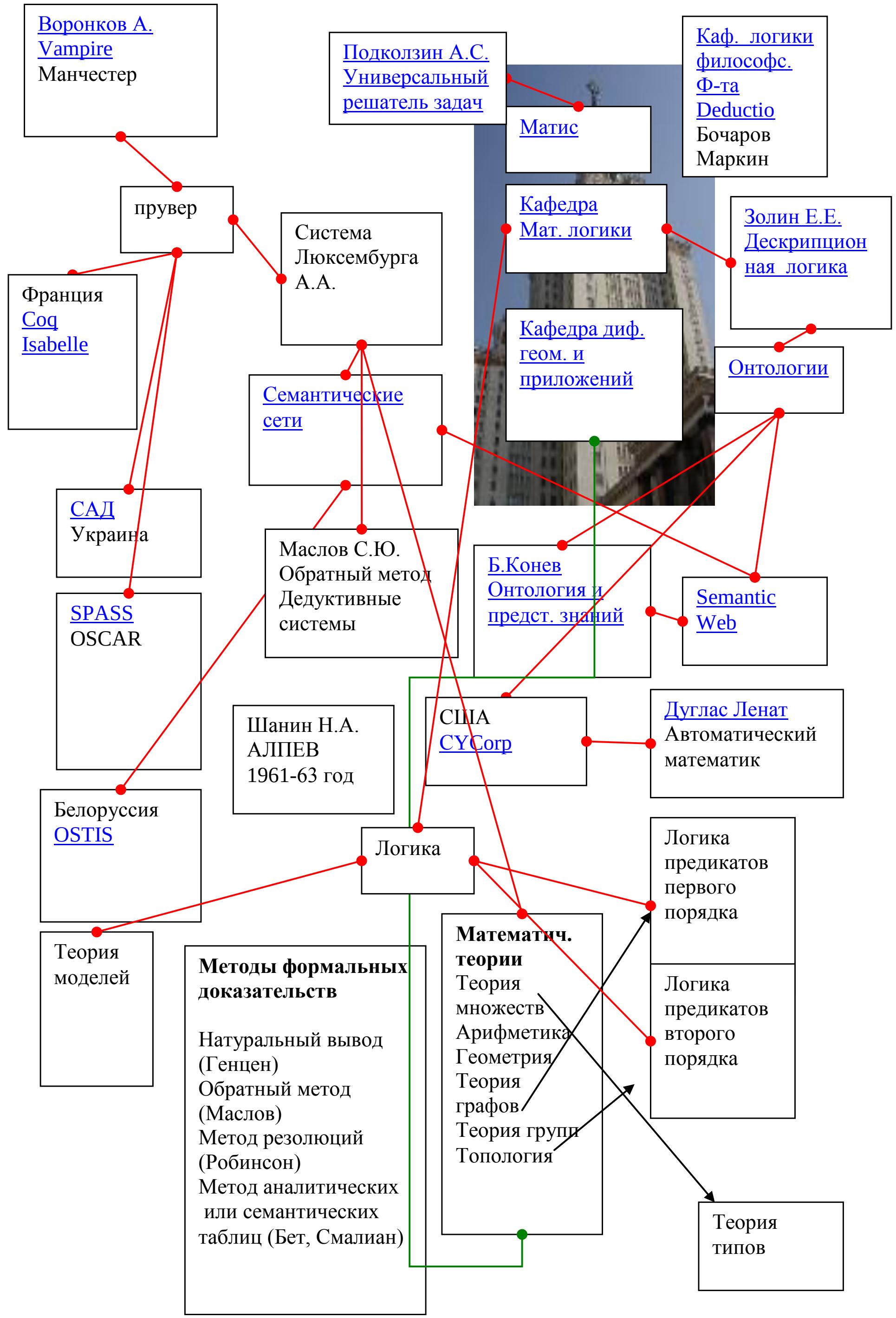
- Геометрия

Точка, прямая, плоскость, треугольник окружность, медиана

- Топология

Линия, сфера, тор, гомотопия, гомологии

Семантическая сеть



Онтология OntoMathPRO

Онтология OntoMathPRO элементов математического знания создана группой математиков Казанского федерального университета и Института прикладной семиотки АН Республики Татарстан (см. [13]) и содержит определения как общепринятых математических понятий, так и развивающуюся терминологию из теории чисел, теории множеств, алгебры, геометрии, математической логики, дискретной математики, теории алгоритмов, математического анализа, дифференциальных уравнений, численных методов, теории вероятностей и математической статистики. Основой онтологии послужил массив статей журнала "Известия вузов. Математика" за 1995—2009 годы: она содержит 3450 классов, 6 типов свойств объектов, 3630 экземпляров свойства "подкласс—класс" и 1140 экземпляров остальных свойств. Метаданные каждого класса включают его определение и наиболее употребляемые наименования, в том числе синонимы. Семантика концептов OntoMathPRO устанавливалась с использованием как классических математических изданий, так и электронных ресурсов, в частности Wikipedia и Cambridge Mathematical Thesaurus. Решена задача упорядочивания массива математических понятий путем выделения ассоциативных связей, моделирующих различную степень зависимости как между самими терминами, так и между ними и разделами математики, представленными в онтологии. OntoMathPRO содержит тексты определений математических понятий и может рассматриваться как образовательный ресурс.

По отношению "подкласс — класс" в On-toMathPRO выделены две иерархии — разделов математики и элементов математического знания. В первой представлена таксономия основных разделов математики. Фундаментальные разделы — геометрия и анализ — разработаны более детально, например, выделены такие подразделы геометрии, как аналитическая, дифференциальная, фрактальная геометрия. Верхний уровень иерархии представлен тремя типами классов:
(i) базовые математические понятия (например, множество, оператор, функция, тензор);
(ii) корневые элементы соответствующих разделов математики (например, элемент теории математического анализа, элемент теории чисел);
(iii) общенаучные понятия (например, теорема, задача, метод, формула, высказывание).
Допускается нахождение класса в разных иерархиях (например, класс "Теорема Коши" является как подклассом класса "Теорема", так и подклассом класса "Элемент теории дифференциальных уравнений").

Сергей Давидович Мешвелиани
Старший научный сотрудник
Исследовательский центр многопроцессорных систем,
Институт программных систем,

I. DoCon-A. Библиотека вычислительной алгебры, основанная на подходе конструктивной математики и доказуемом программировании с зависимыми типами. (Применяется язык Agda). Выпуски программы доступны на doconA.

II. Проект "Построитель алгебраических областей" (DoCon)

Это есть библиотека чисто функциональных программ для вычислительной алгебры, основанная на обобщённом программировании (generic programming). Применяется язык и инструмент Haskell. Интенсивно разрабатывалась в 1995 -- 2000 годах. В настоящее время поддерживается. Руководством (на английском языке) и исходные программы доступны в docon.

Одна из целей проекта: испытать производительность реальной программы CA, написанной функционально для `ленивого' способа вычислений. Алгебраические категории представлены классами языка Haskell, области -- `случаями' (instance) классов вместе с явными выражениями описания области,

III. Исследование по соединению компьютерной алгебры, системы переписывания термов и автоматических доказательств.

Программа "Думатель". dumatel-1.02

Этот проект прерван в 2012 году. Намечается применить этот доказыватель к построению доказательств в библиотеке DoCon-A.

Васильев Станислав Николаевич академик ран

НОВЫЕ МЕТОДЫ ДЕДУКЦИИ И ГИПОТЕЗИРОВАНИЯ

Построена новая первопорядковая логика с классической семантикой, полная относительно выводимости и с рядом не обеспечивавшихся раньше в литературе особенностей, в числе которых:

• свойство сильной модифицируемости семантики (немонотонность логики, конструктивность, динамичность и др.),

• высокая совместимость с эвристиками в приложениях к автоматизации планирования действий, управлению со структурной реконфигурацией и др. (С.Н.Васильев и др. Интеллектное управление динамическими системами, М.- ФМЛ, 2000).

В развитие этой логики разработан метод автоматического гипотезирования, т.е. порождения условий выводимости хорновских и некоторых других формул, эффективно совмещающий в себе возможности систем автоматической дедукции и процедур генерализации первопорядковых формул (индуктивного типа, С.Н.Васильев, СМЖ, 1997).

СЕМАНТИКА ЯЗЫКА ПО-ФОРМУЛ

Семантика по-формулы Φ определяется обычной (теоретико-модельной, дескриптивной) семантикой соответствующей формулы $(\Phi)^*$ классического первопорядкового исчисления предикатов. Соответствие устанавливается так:

1) если $A \in Con$, $A \notin \{F, T\}$, тогда $A^{\&} = \&\{\alpha : \alpha \in A\}$, $F^{\&} = \mathit{False}$, $T^{\&} = \mathit{True}$ (пропозициональные константы);

2) $(\exists X : A)^* = \exists x_1 \ \dots \ \exists x_m \ A^{\&} \ \Leftrightarrow \ \exists x_1 \ \dots \ \exists x_m \ \& \{\alpha : \alpha \in A\}$, где $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = X$;

3) $(\forall X : A \quad \exists{:}\mathit{False})^* = \forall x_1 \dots \forall x_m \, (A^{\&} \rightarrow \mathit{False}) \ \Leftrightarrow \ \forall x_1 \dots \forall x_m \, \neg \, (A^{\&}) \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ \forall x_1 \dots \forall x_m \ \vee \{\neg \, \alpha : \alpha \in A\}$;

4) $(\exists X : A \quad \Phi)^* = \exists x_1 \dots \exists x_m \, (A^{\&} \& \, (\Phi)^*) = \exists x_1 \dots \exists x_m \, (A^{\&} \& \, (\& \, \{(\alpha)^* : \alpha \in \Phi\}))$;

5) $(\forall X : A \quad \Phi)^* = \forall x_1 \dots \forall x_m \, (A^{\&} \rightarrow (\Phi)^*) = \forall x_1 \dots \forall x_m \, (A^{\&} \rightarrow (\vee \{(\alpha)^* : \alpha \in \Phi\}))$.

Теорема: *Язык L полон относительно выразительной силы исчисления предикатов (1-го порядка).*

ПОЛНЫЙ (УНИВЕРСАЛЬНЫЙ) МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Любой непосредственный последователь $\forall Y : B$ базы $\exists X : A$ называется **вопросом** к $\exists X : A$. Вопрос $\forall Y : B$ к базе $\exists X : A$ имеет **ответ** Θ тогда и только тогда, когда Θ — отображение (подстановка) $Y \to X$ и $B\Theta \subseteq A$.

Пусть по–формула $\mathcal{F}$ имеет структуру $\forall \mathrm{T}\ \{\Psi,\ \ \exists X{:}A\ \ \Phi\}$, т.е.

$$\mathcal{F} \overset{df}{=} \forall \mathrm{T} \begin{cases} \exists X\colon A \left\{\Phi\right. \\ \Psi \end{cases}$$

и при этом Φ содержит подформулу

$$\forall Y\colon B\ \{\exists Z_i\colon C_i\ \Psi_i\}_{i=\overline{1,k}} \overset{df}{=} \forall Y\colon B \begin{cases} \exists Z_1\colon C_1 \left\{\Psi_1\right. \\ \dots \\ \exists Z_k\colon C_k \left\{\Psi_k.\right. \end{cases}$$

- Алгебраическая система

AS=<M;Pi,Fj,Ck>

M - множество

Pi — множество символов для отношений (предикатов),

Fj — множество функциональных символов,

Ck - множество символов констант

множество (*носитель*) с заданным на нём набором операций и отношений (*сигнатура*), удовлетворяющим некоторой системе аксиом.

Примеры: группа, кольцо, алгебра, решетка, поле

Дедуктивная система

- DS=<On,Ri,Ok>

On-начальные объекты

Ri-правила построения объектов

Ok-построенные объекты

Примеры: <аксиомы, правила вывода, теоремы>

<отрезок; декартовое произведение,склейка по границе; квадрат, тор, сфера,..>

Сравнение AS и DS

- Различия

нач. объекты

- Общее

Правила можно сопоставить функциям и операциям

Логика предикатов

- *Язык* **логики первого порядка** строится на основе сигнатуры, состоящей из множества функциональных символов F и множества предикатных символов P. С каждым функциональным и предикатным символом связана арность, то есть число возможных аргументов. Допускаются как функциональные, так и предикатные символы арности 0. Первые иногда выделяют в отдельное множество *констант*. Кроме того, используются следующие дополнительные символы
- Символы переменных (обычно x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, ….),
- Пропозициональные связки: /\ (&),\/ ,=>, ¬
- Кванторы: всеобщности ∀ и существования ∃
- Служебные символы: скобки и запятая.
- Перечисленные символы вместе с символами из и образуют *Алфавит* **логики первого порядка**. Более сложные конструкции определяются индуктивно:
- Терм есть символ переменной, либо имеет вид f(t1,…,tn) , где f — функциональный символ арности n, а t1,t2,...,tn— термы.
- Атом имеет вид p(t1,…,tn) , где p — предикатный символ арности n , а t1,t2,...,tn— термы.
- Формула — это либо атом, либо одна из следующих конструкций: ¬F1,F1/\F2, F1\/F2, F1=>F2, ∀ xF1, ∃ xF1
- где Fi — формулы, а x— переменная.
- Есть свободные и связанные переменные
- Формулу без свободных переменных называют *замкнутой формулой*, или *предложением*. *Теорией первого порядка* называют любое множество предложений.

Определимость и выразимость

- Пусть фиксирована некоторая сигнатура и ее интерпретация с носителем M. Мы хотим определить понятие выразимого (с помощью формулы данной сигнатуры в данной интерпретации) k-местного предиката.
- Выберем k переменных x1, x2,…xk . Рассмотрим произвольную формулу F , все параметры которой содержатся в списке x1, x2,…xk . Истинность этой формулы зависит только от значений переменных x1, x2,…xk M^k-> {И,Л}. Тем самым возникает отображение , то есть некоторый k- местный предикат на M . Говорят, что этот предикат выражается формулой F. Все предикаты, которые можно получить таким способом, называются выразимыми. (Ясно, что конкретный выбор списка переменных роли не играет.) Соответствующие им подмножества множества (области истинности выразимых предикатов) также называют выразимыми.

- Будем говорить, что предикат P на множестве M выразим из предикатов P1, P2,…, Pk на множестве M если мы можем выразить некоторое предложение на русском языке, оперирующее только предикатами P1, P2,…, Pk и такое что, оно истинно в том и только в том случае если истинен предикат P. Кроме самих предикатов можно использовать логические связки и кванторы.
- Пример: Можно ли трехместный предикат «лежать между» для трех точек на прямой выразить через отношение порядка на прямой?

Основные структуры в математике

1. Алгебраические
2. Структуры порядка
3. Топологические

Множества образуют булеву алгебра ($\cup$,$\cap$)

$\supset$ Порядок

Аксиомы топологии записываются через $\cup$,$\cap$

Выразительная сила теории множеств.

Правила построения формул

- Основная идея. У нас есть предикат принадлежности. Рассмотрим предикаты, которые можно выразить через него и выразимые множества этих предикатов.
- Атомарными считаются формулы: $P0(xi, Aj):=xi\in Aj$

1. Отрицание $P_j := \neg P_i$

2. Объединение с помощью логических связок $P_k := P_i \wedge P_j$,

   $P_k := P_i \vee P_j$, $P_k := P_i \Rightarrow P_j$

3. Навешивание кванторов. Для любой свободной переменной x в предикате Pi можно построить новые предикаты:

   $P_j := (\forall x) P_i$, $P_k := (\exists x)\, Pi$

4. Пусть есть конечный набор переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тогда можно определить строку $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ -это кортеж из n переменных

5. Построение математического объекта (понятия). Пусть есть предикат $P(x_1, x_2,\ldots,x_k)$, (где $x_1, x_2,\ldots,x_k$ –свободные переменные), тогда можно построить множество

$$M(x_{n+1}, \ldots,x_k):=\{ \langle x_1, x_2,\ldots,x_n \rangle \mid P(x_1, x_2,\ldots,x_n, x_{n+1}, \ldots,x_k) \}$$

это можно рассматривать как синтаксическое определение множества истинности предиката. Семантически это означает (если задана интерпретация и логическая эквивалентность):

$$\langle x_1, x_2,\ldots,x_n \rangle \in M(x_{n+1}, \ldots,x_k) \Leftrightarrow P(x_1, x_2,\ldots,x_n, x_{n+1}, \ldots,x_k) \}$$

или

$$P0(\langle x_1, x_2,\ldots,x_n \rangle , M(x_{n+1}, \ldots,x_k)) \Leftrightarrow P(x_1, x_2,\ldots,x_n, x_{n+1}, \ldots,x_k)$$

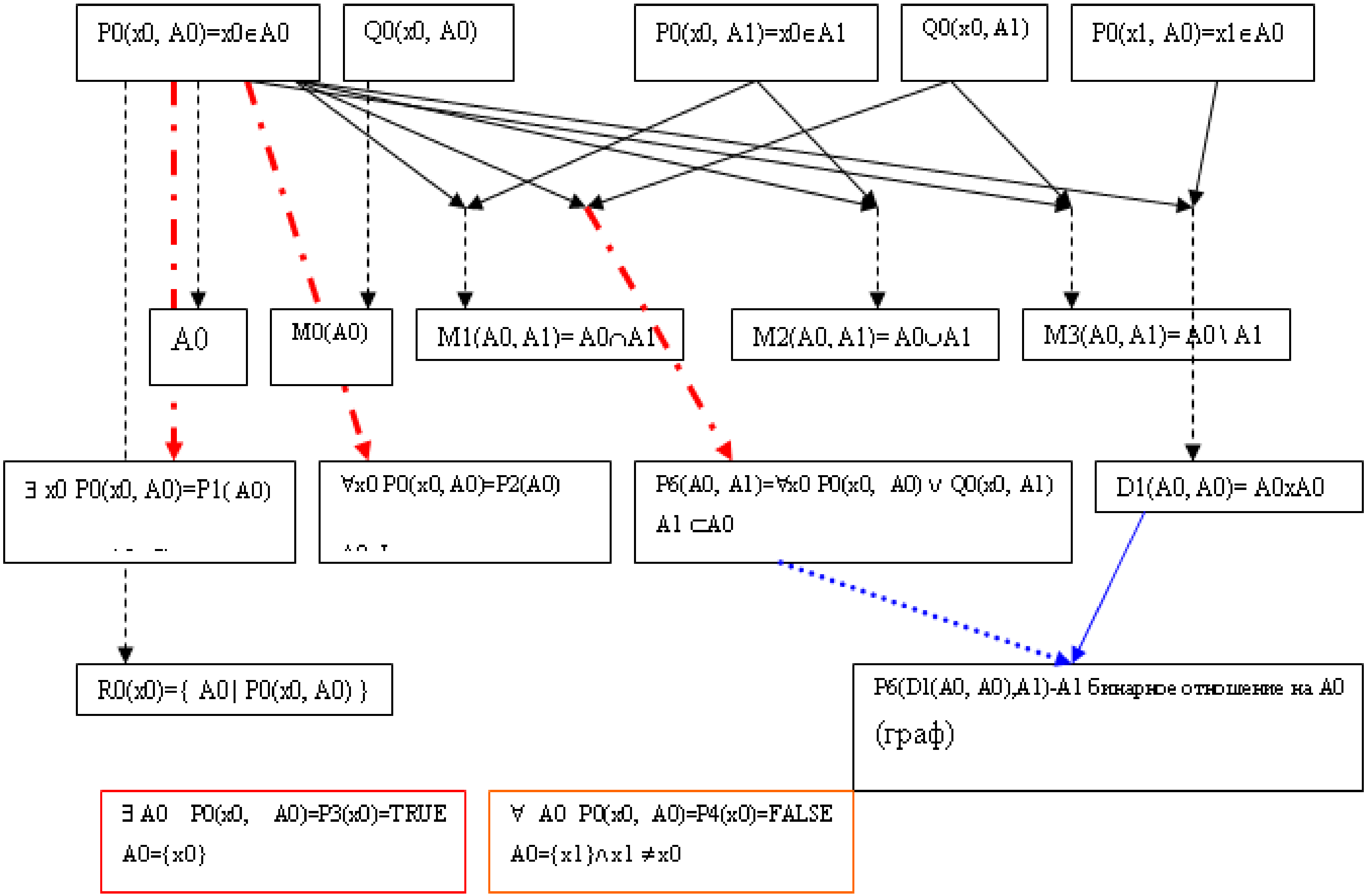
6. Подстановка переменных. В предикате P или объекте M можно заменять переменные. Т.к. математические объекты, по сути, являются множествами их можно подставлять в качестве переменных в предикаты.

- Окружность

  $Окр(O,R)=\{ a \mid (a,O)=R\}$

Обозначения:

конъюнкция, дизъюнкция
- навешивание квантора
- построение мат. объекта (множества)
- подстановка переменных



Пример доказательства теоремы.

$(A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C) = TRUE$

Заменяется по определению включение:

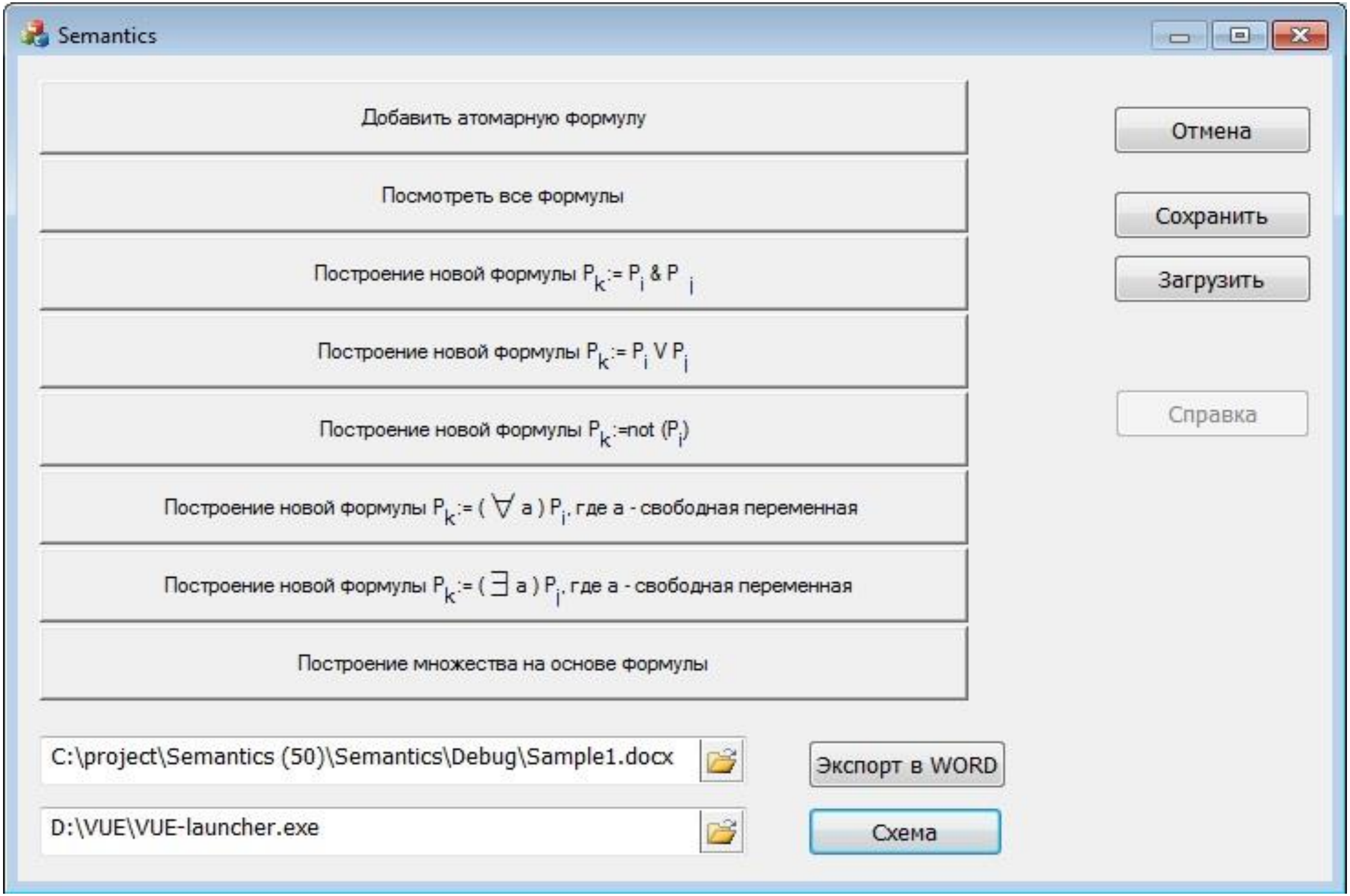
$\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x\ (x \in B \Rightarrow x \in C) \Rightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in C)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in A \Rightarrow x \in A \qquad \dfrac{x \in B \Rightarrow x \in B \quad x \in C \Rightarrow x \in C}{x \in B, x \in B \to x \in C \Rightarrow x \in C}}{x \in A, x \in A \to x \in B, x \in B \to x \in C \Rightarrow x \in C}}{x \in A \to x \in B, x \in B \to x \in C \Rightarrow x \in A \to x \in C}}{x \in A \to x \in B, \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow x \in A \to x \in C}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B), \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow x \in A \to x \in C}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B), \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C)}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B), \forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C)}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C), \forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C)}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C)}}{\Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C) \to \forall x\,(x \in A \to x \in C)}
$$

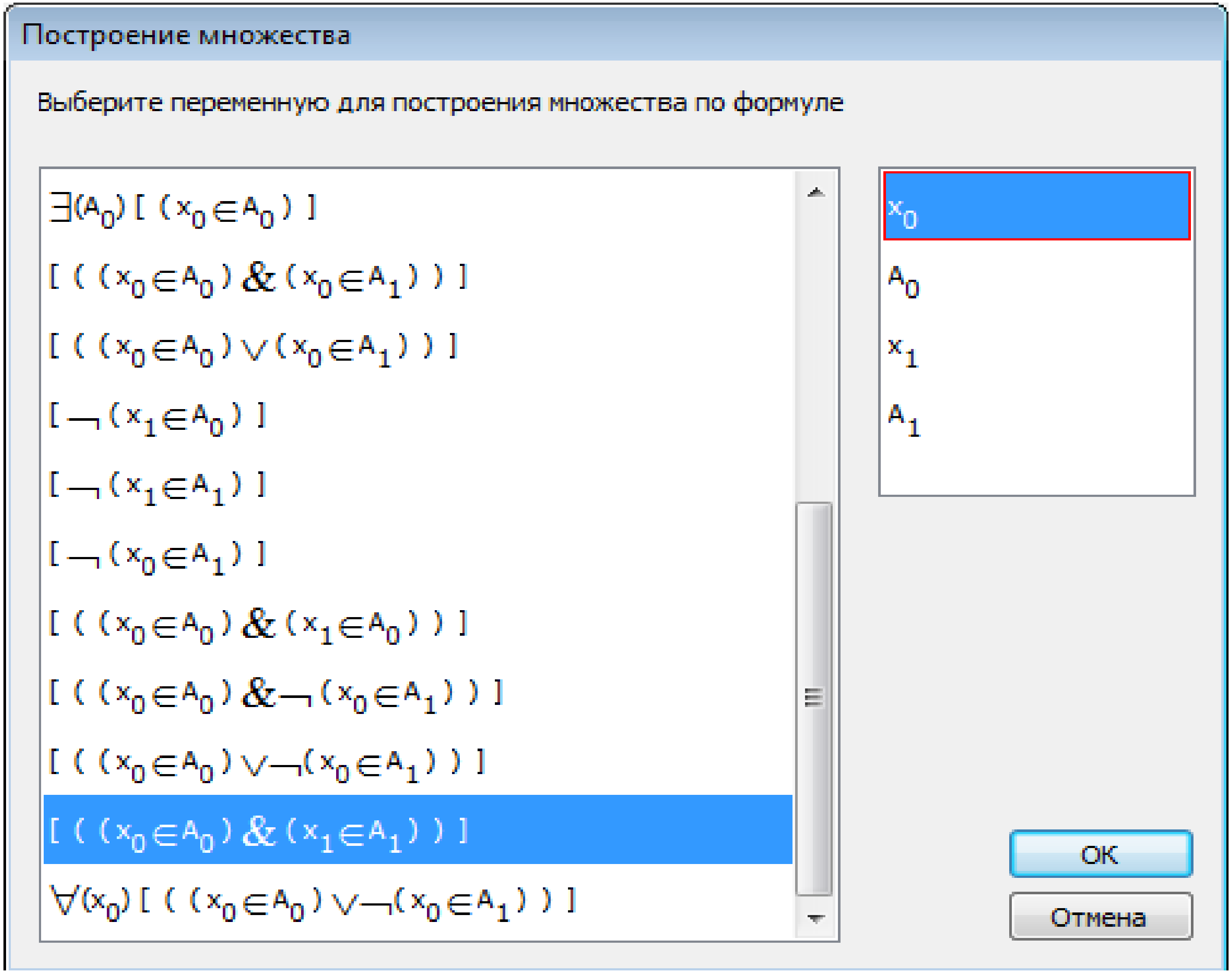
Программа

- Для построения семантических сетей используются программа VUE (Visual Understanding Environment) написанная в американском университете и свободно распространяемая [12]. На данный момент в программе реализован только синтаксис, семантика планируется в будущем.
- В программе из атомарных формул в «ручном» режиме строятся более сложные. Есть возможность сохранять построенные формулы с их описанием в вордовском файле. Есть возможность загружать из Word файл.
- Ниже приведен пример построения около 80 формул. В начале есть четыре атомарные формулы: ($x_0 \in A_0$), ($x_0 \in B_0$), ($x_1 \in A_0$), ($x_1 \in B_0$). С помощью описанных выше правил строятся новые формулы. Интересно, что все основные понятия (сигнатура) теории множеств строится из формул, чья длина по количеству атомарных не превышает двух.

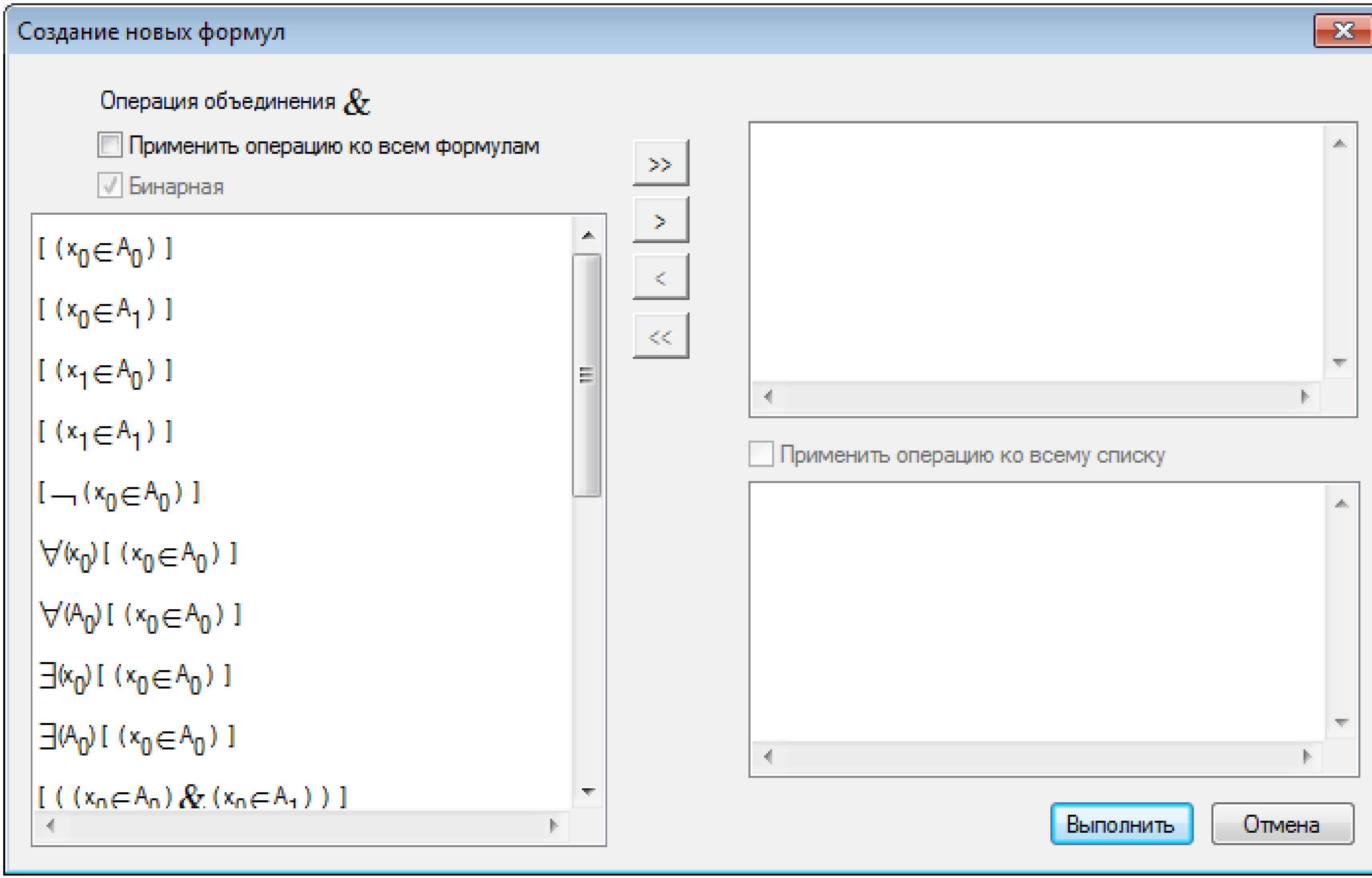
Стартовый интерфейс



Интерфейс для построения множества по предикату.



Интерфейс для логического объединения формул.



Первая часть построенных формул

Список формул

Ном...	Формула	Тип	Свободные...	Описание	Add...	Обозначение
1	$[\ (x_0 \in A_0)\ ]$	выполнима	$x_0 . A_0$			$P_0(x_0 . A_0)$
2	$[\ (x_0 \in A_1)\ ]$	выполнима	$x_0 . A_1$			$P_0(x_0 . A_1)$
3	$[\ (x_1 \in A_0)\ ]$	выполнима	$x_1 . A_0$			$P_0(x_1 . A_0)$
4	$[\ (x_1 \in A_1)\ ]$	выполнима	$x_1 . A_1$			$P_0(x_1 . A_1)$
5	$[\neg(x_0 \in A_0)\ ]$	выполнима	$x_0 . A_0$			$P_1(x_0 . A_0)$
6	$\forall(x_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$		A_0	A0 -универсум		$P_2(A_0)$
7	$\forall(A_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$		x_0	false		$P_3(x_0)$
8	$\exists(x_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$		A_0	A0 не пустое		$P_4(A_0)$
9	$\exists(A_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$		x_0	true		$P_5(x_0)$
10	$\{x_0 \mid P_0(x_0 . A_0)\ \}$		$x_0 . A_0$	A0		$M_0(A_0)$
11	$\{A_0 \mid P_0(x_0 . A_0)\ \}$		$x_0 . A_0$			$R_0(x_0)$
12	$[\ (\ (x_0 \in A_0)\ \&\ (x_0 \in A_1)\ )\ ]$		$x_0 . A_0 . A_1$			$P_6(x_0 . A_0 . A_1)$
13	$[\ (\ (x_0 \in A_0) \vee (x_0 \in A_1)\ )\ ]$		$x_0 . A_0 . A_1$			$P_7(x_0 . A_0 . A_1)$
14	$[\neg(x_1 \in A_0)\ ]$	выполнима	$x_1 . A_0$			$P_8(x_1 . A_0)$
15	$[\neg(x_1 \in A_1)\ ]$	выполнима	$x_1 . A_1$			$P_9(x_1 . A_1)$
16	$[\neg(x_0 \in A_1)\ ]$	выполнима	$x_0 . A_1$			$P_{10}(x_0 . A_1)$

OK Отмена

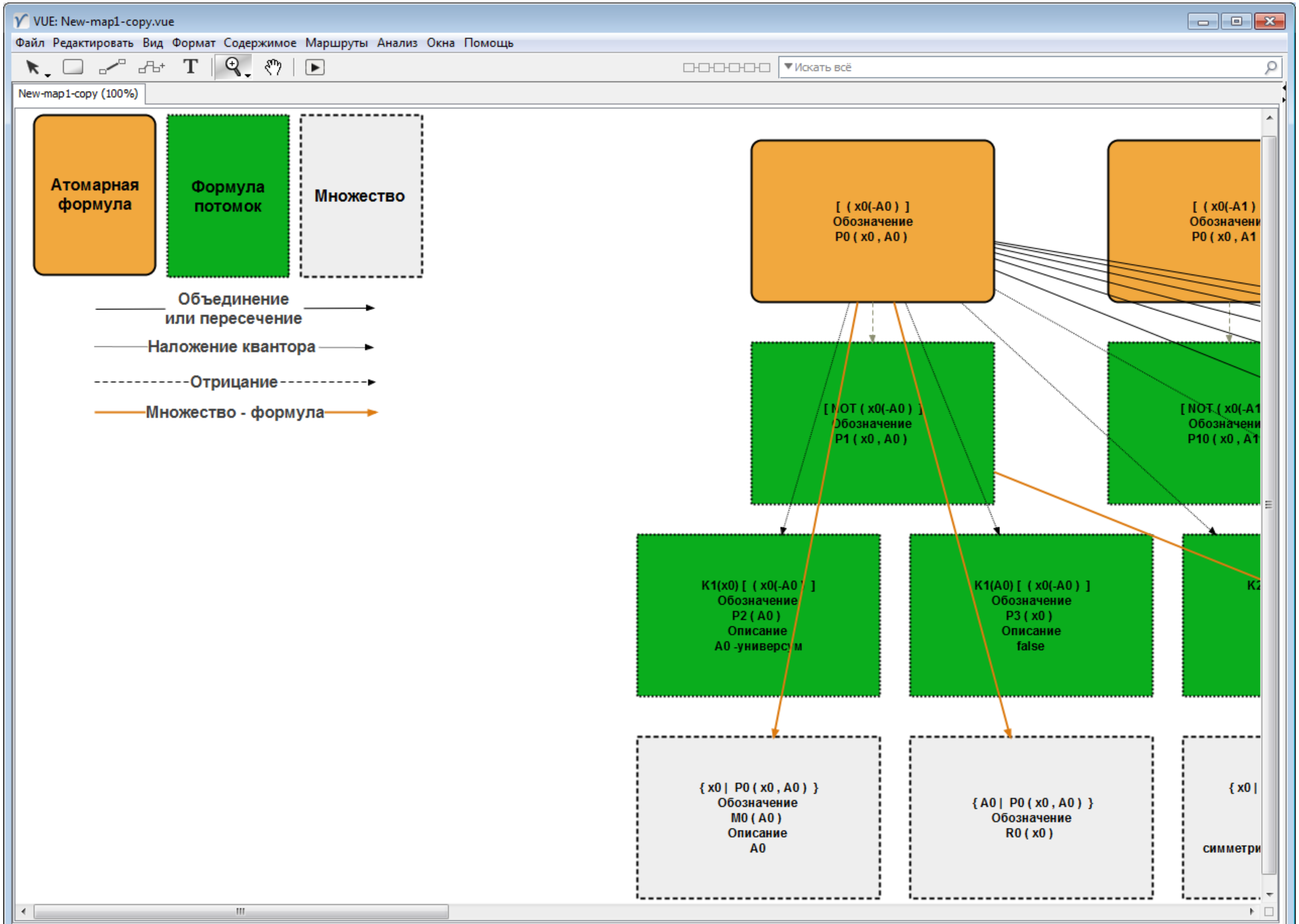
Вторая часть построенных формул

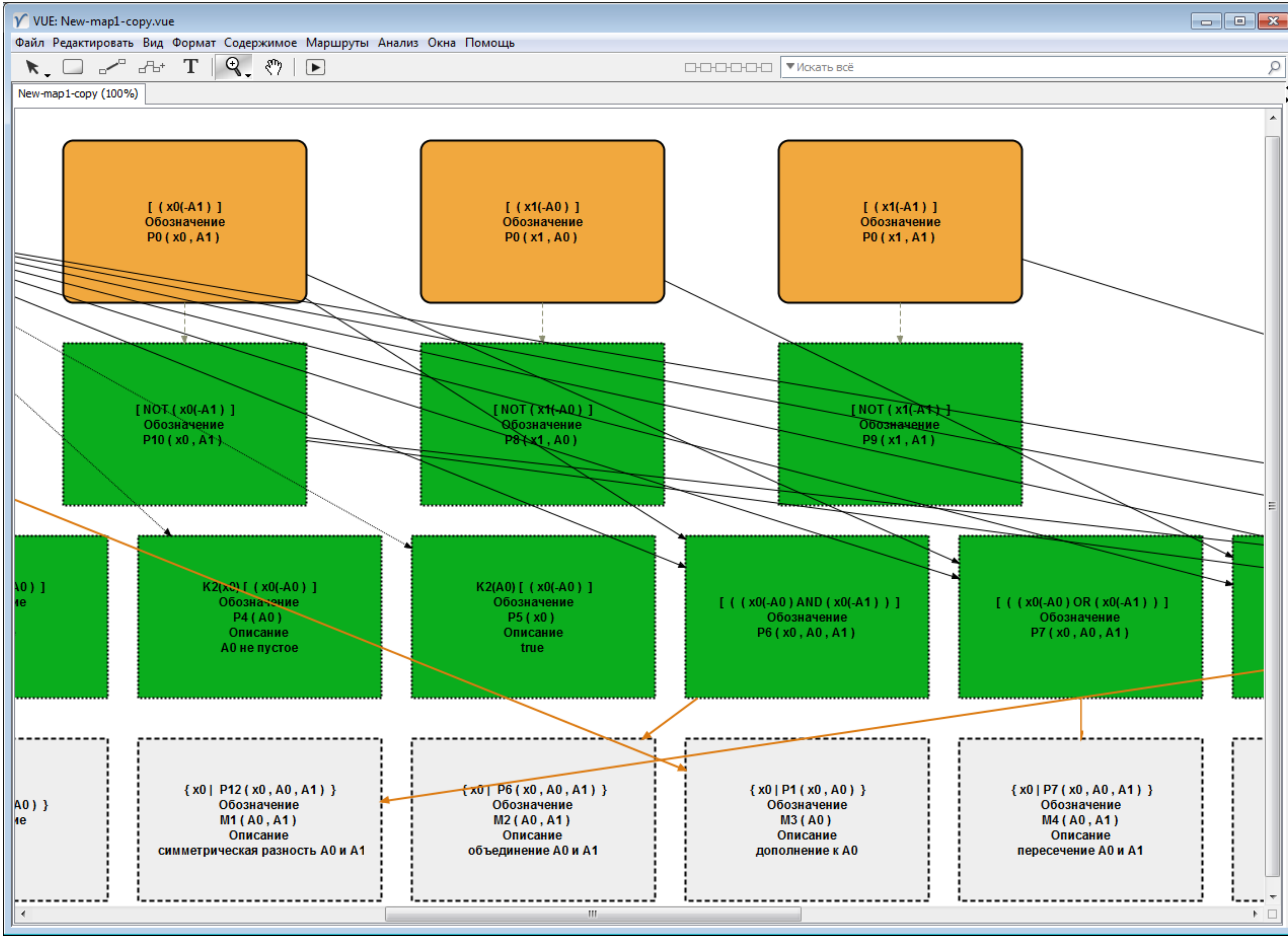
Список формул

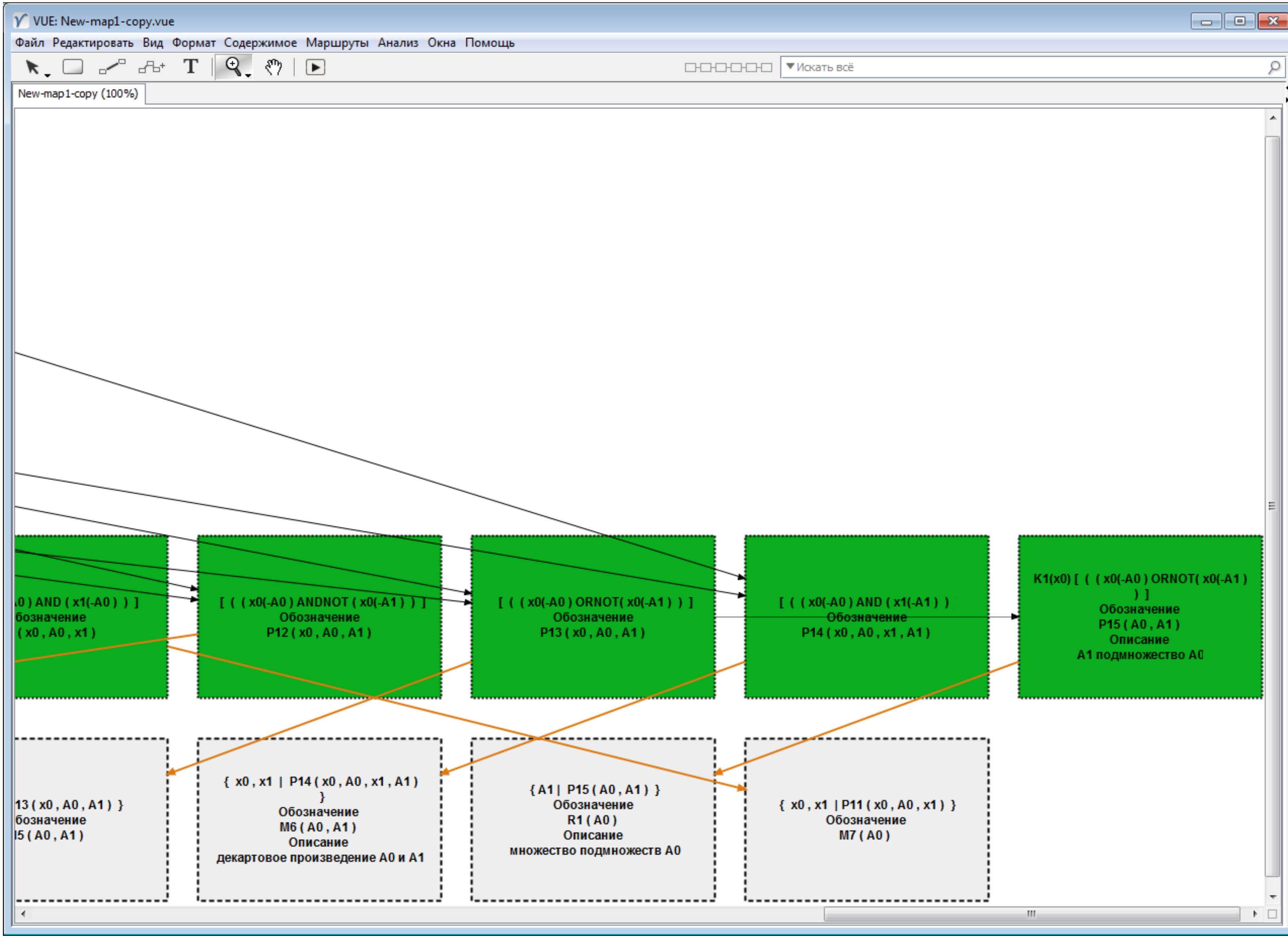
Ном...	Формула	Тип	Свободные...	Описание	Add...	Обозначение
14	$[\neg(x_1 \in A_0)]$	выполнима	$x_1 . A_0$			$P_8(x_1 . A_0)$
15	$[\neg(x_1 \in A_1)]$	выполнима	$x_1 . A_1$			$P_9(x_1 . A_1)$
16	$[\neg(x_0 \in A_1)]$	выполнима	$x_0 . A_1$			$P_{10}(x_0 . A_1)$
17	$[((x_0 \in A_0) \& (x_1 \in A_0))]$		$x_0 . A_0 . x_1$			$P_{11}(x_0 . A_0 . x_1)$
18	$[((x_0 \in A_0) \& \neg(x_0 \in A_1))]$		$x_0 . A_0 . A_1$			$P_{12}(x_0 . A_0 . A_1)$
19	$\{x_0 \mid P_{12}(x_0 . A_0 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . A_1$	симметрическая разность A0 и A1		$M_1(A_0 . A_1)$
20	$\{x_0 \mid P_6(x_0 . A_0 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . A_1$	объединение A0 и A1		$M_2(A_0 . A_1)$
21	$\{x_0 \mid P_1(x_0 . A_0)\}$		$x_0 . A_0$	дополнение к A0		$M_3(A_0)$
22	$\{x_0 \mid P_7(x_0 . A_0 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . A_1$	пересечение A0 и A1		$M_4(A_0 . A_1)$
23	$[((x_0 \in A_0) \vee \neg(x_0 \in A_1))]$		$x_0 . A_0 . A_1$			$P_{13}(x_0 . A_0 . A_1)$
24	$\{x_0 \mid P_{13}(x_0 . A_0 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . A_1$			$M_5(A_0 . A_1)$
25	$[((x_0 \in A_0) \& (x_1 \in A_1))]$		$x_0 . A_0 . x_1 . A_1$			$P_{14}(x_0 . A_0 . x_1 . A_1)$
26	$\{<x_0 . x_1> \mid P_{14}(x_0 . A_0 . x_1 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . x_1 . A_1$	декартовое произведение A0 и A1		$M_6(A_0 . A_1)$
27	$\forall(x_0)[((x_0 \in A_0) \vee \neg(x_0 \in A_1))]$		$A_0 . A_1$	A1 подмножество A0		$P_{15}(A_0 . A_1)$
28	$\{A_1 \mid P_{15}(A_0 . A_1)\}$		$A_0 . A_1$	множество подмножеств A0		$R_1(A_0)$
29	$\{<x_0 . x_1> \mid P_{11}(x_0 . A_0 . x_1)\}$		$x_0 . A_0 . x_1$			$M_7(A_0)$

OK Отмена

В верхнем ряду атомарные формулы. Во втором их отрицания. Дальше построенные предикаты и множества




VUE: New-map1-copy.vue
Файл Редактировать Вид Формат Содержимое Маршруты Анализ Окна Помощь
Искать всё
New-map1-copy (100%)
[(x0(-A1)]
Обозначение
P0 (x0 , A1)
[(x1(-A0)]
Обозначение
P0 (x1 , A0)
[(x1(-A1)]
Обозначение
P0 (x1 , A1)
[NOT (x0(-A1)]
Обозначение
P10 (x0 , A1)
[NOT (x1(-A0)]
Обозначение
P8 (x1 , A0)
[NOT (x1(-A1)]
Обозначение
P9 (x1 , A1)
K2(x0) [(x0(-A0)]
Обозначение
P4 (A0)
Описание
A0 не пустое
K2(A0) [(x0(-A0)]
Обозначение
P5 (x0)
Описание
true
[((x0(-A0) AND (x0(-A1))]
Обозначение
P6 (x0 , A0 , A1)
[((x0(-A0) OR (x0(-A1))]
Обозначение
P7 (x0 , A0 , A1)
{ x0 | P12 (x0 , A0 , A1) }
Обозначение
M1 (A0 , A1)
Описание
симметрическая разность A0 и A1
{ x0 | P6 (x0 , A0 , A1) }
Обозначение
M2 (A0 , A1)
Описание
объединение A0 и A1
{ x0 | P1 (x0 , A0) }
Обозначение
M3 (A0)
Описание
дополнение к A0
{ x0 | P7 (x0 , A0 , A1) }
Обозначение
M4 (A0 , A1)
Описание
пересечение A0 и A1


VUE: New-map1-copy.vue
Файл Редактировать Вид Формат Содержимое Маршруты Анализ Окна Помощь
Искать всё
New-map1-copy (100%)
0) AND (x1(-A0))]
бозначение
(x0 , A0 , x1)
[((x0(-A0) ANDNOT (x0(-A1))]
Обозначение
P12 (x0 , A0 , A1)
[((x0(-A0) ORNOT(x0(-A1))]
Обозначение
P13 (x0 , A0 , A1)
[((x0(-A0) AND (x1(-A1))
Обозначение
P14 (x0 , A0 , x1 , A1)
K1(x0) [((x0(-A0) ORNOT(x0(-A1))]
Обозначение
P15 (A0 , A1)
Описание
A1 подмножество A0
13 (x0 , A0 , A1) }
бозначение
I5 (A0 , A1)
{ x0 , x1 | P14 (x0 , A0 , x1 , A1) }
Обозначение
M6 (A0 , A1)
Описание
декартовое произведение A0 и A1
{ A1 | P15 (A0 , A1) }
Обозначение
R1 (A0)
Описание
множество подмножеств A0
{ x0 , x1 | P11 (x0 , A0 , x1) }
Обозначение
M7 (A0)

N	Формула	Свободные переменные	Обозначение	Символьное	Перевод на естественный язык
1	$[\ (x_0 \in A_0)\ ]$	x_0, A_0	$P_0(x_0, A_0)$		
2	$[\ (x_0 \in B_0)\ ]$	x_0, B_0	$P_0(x_0, B_0)$		
3	$[\ (x_1 \in A_0)\ ]$	x_1, A_0	$P_0(x_1, A_0)$		
4	$[\ (x_1 \in B_0)\ ]$	x_1, B_0	$P_0(x_1, B_0)$		
5	$[\ \neg((x_0 \in A_0))\ ]$	x_0, A_0	$P_1(x_0, A_0)$		
6	$\forall(x_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$	A_0	$P_2(A_0)$	$A_0=U$	A_0-универсум
7	$\forall(A_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$	x_0	$P_3(x_0)$		
8	$\exists(x_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$	A_0	$P_4(A_0)$	$A_0 \neq \varnothing$	
9	$\exists(A_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$	x_0	$P_5(x_0)$		
10	$\forall(x_0)[\ \neg((x_0 \in A_0))\ ]$	A_0	$P_6(A_0)$	$A_0=\varnothing$	A_0-пустое множество
11	$\exists(A_0)\exists(x_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$		$P_7(\ )$		TRUE аксиома
12	$\{x_0 \mid (x_0 \in A_0)\}$	A_0	$A_1(A_0)$		A_0
13	$\{A_0 \mid (x_0 \in A_0)\}$	x_0	$R_0(x_0)$		
14	$[\ (\ (x_0 \in A_0) \,\&\, (x_0 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, B_0	$P_8(x_0, A_0, B_0)$		
15	$[\ (\ (x_0 \in A_0) \vee (x_0 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, B_0	$P_9(x_0, A_0, B_0)$		
16	$[\ (\ \neg((x_0 \in A_0)) \vee (x_0 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, B_0	$P_{10}(x_0, A_0, B_0)$		
17	$[\ (\ \neg((x_0 \in A_0)) \,\&\, (x_0 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, B_0	$P_{11}(x_0, A_0, B_0)$		
18	$\{x_0 \mid (\ (x_0 \in A_0) \,\&\, (x_0 \in B_0)\ )\}$	A_0, B_0	$M_0(A_0, B_0)$	$A_0 \cap B_0$	Пересечение множеств

19	$x_0 \in M_0(A_0, B_0)$	x_0, A_0, B_0	$P_{08}(x_0, A_0, B_0)$		
20	$\langle x_0 \rangle \in M_1(A_0, B_0)$	x_0, M_1	$P_{12}(x_0, M_1)$		
21	$M_1(A_0, B_0) \subset M_0(A_0, B_0)$	A_0, B_0, M_1	$P_{13}(A_0, B_0, M_1)$		
22	$\{ x_0 \mid ((x_0 \in A_0) \vee (x_0 \in B_0)) \}$	A_0, B_0	$N_0(A_0, B_0)$	$A_0 \cup B_0$	Объединение множеств
23	$x_0 \in N_0(A_0, B_0)$	x_0, A_0, B_0	$P_{09}(x_0, A_0, B_0)$		
24	$\langle x_0 \rangle \in N_1(A_0, B_0)$	x_0, N_1	$P_{14}(x_0, N_1)$		
25	$N_1(A_0, B_0) \subset N_0(A_0, B_0)$	A_0, B_0, N_1	$P_{15}(A_0, B_0, N_1)$		
26	$\{ x_0 \mid (\neg((x_0 \in A_0)) \& (x_0 \in B_0)) \}$	A_0, B_0	$M_2(A_0, B_0)$	$B_0 \setminus A_0$	Разность множеств
27	$[((x_0 \in A_0) \& (x_1 \in A_0))]$	x_0, A_0, x_1	$P_{16}(x_0, A_0, x_1)$		
28	$\{ \langle x_0, x_1 \rangle \mid ((x_0 \in A_0) \& (x_1 \in A_0)) \}$	A_0	$D_0(A_0)$	$A_0 x A_0$	
29	$\langle x_0, x_1 \rangle \in D_0(A_0)$	x_0, A_0, x_1	$P_{016}(x_0, A_0, x_1)$		
30	$\langle x_0, x_1 \rangle \in G_0(A_0)$	x_0, x_1, G_0	$P_{17}(x_0, x_1, G_0)$		
31	$G_0(A_0) \subset D_0(A_0)$	A_0, G_0	$P_{18}(A_0, G_0)$		G_0 граф на A_0 (бинарное отношение на A_0

32	$[\ (\ (x_0 \in A_0) \ \&\ (x_1 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, x_1, B_0	$P_{19}(x_0, A_0, x_1, B_0)$	
33	$(A_0 x B_0)$	A_0, B_0	$D_1(A_0, B_0)$	
34	$\langle x_0, x_1 \rangle \in (A_0 x B_0)$	x_0, A_0, x_1, B_0	$P_{019}(x_0, A_0, x_1, B_0)$	
35	$\langle x_0, x_1 \rangle \in H_0(A_0, B_0)$	x_0, x_1, H_0	$P_{20}(x_0, x_1, H_0)$	
36	$H_0(A_0, B_0) \subset (A_0 x B_0)$	A_0, B_0, H_0	$P_{21}(A_0, B_0, H_0)$	
37	$\langle x_0, x_2 \rangle \in G_0(A_0)$	x_0, x_2, G_0	$P_{22}(x_0, x_2, G_0)$	
38	$\langle x_1, x_2 \rangle \in G_0(A_0)$	x_1, x_2, G_0	$P_{23}(x_1, x_2, G_0)$	
39	$\langle x_1, x_0 \rangle \in G_0(A_0)$	x_1, x_0, G_0	$P_{24}(x_1, x_0, G_0)$	
40	$\langle x_0, x_0 \rangle \in G_0(A_0)$	x_0, x_0, G_0	$P_{25}(x_0, x_0, G_0)$	
41	$[\ (\neg(\ (x_0 \in A_0)\ ) \vee \langle x_0, x_0 \rangle \in G_0(A_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, G_0	$P_{26}(x_0, A_0, G_0)$	
42	$\forall(x_0)\ [\ (\neg(\ (x_0 \in A_0)\ ) \vee \langle x_0, x_0 \rangle \in G_0(A_0)\ )\ ]$	A_0, G_0	$P_{27}(A_0, G_0)$	G_0-рефлексивное отношение
43	$[\neg(\langle x_0, x_1 \rangle \in G_0(A_0))]$	x_0, x_1, G_0	$P_{28}(x_0, x_1, G_0)$	
44	$[\ (\neg(\langle x_0, x_1 \rangle \in G_0(A_0)) \vee \langle x_1, x_0 \rangle \in G_0(A_0)\ )\ ]$	x_0, x_1, G_0	$P_{29}(x_0, x_1, G_0)$	

45	$\forall(x_0)$ [(¬(⟨ x_0 , x_1 ⟩ ∈ G_0(A_0))∨⟨ x_1 , x_0 ⟩ ∈ G_0(A_0))]	x_1 , G_0	P_{30} (x_1 , G_0)	
46	$\forall(x_1)$ $\forall(x_0)$ [(¬(⟨ x_0 , x_1 ⟩ ∈ G_0(A_0))∨⟨ x_1 , x_0 ⟩ ∈ G_0(A_0))]	G_0	P_{31} (G_0)	G_0-симметричное отношение
47	[¬⟨ x_1 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0)]	x_1 , x_2 , G_0	P_{32} (x_1 , x_2 , G_0)	
48	[(¬(⟨ x_0 , x_1 ⟩ ∈ G_0(A_0))∨¬⟨ x_1 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0))]	x_0 , x_1 , G_0 , x_2	P_{33} (x_0 , x_1 , G_0 , x_2)	
49	[((¬(⟨ x_0 , x_1 ⟩ ∈ G_0(A_0))∨¬⟨ x_1 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0)) ∨⟨ x_0 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0))]	x_0 , x_1 , G_0 , x_2	P_{34} (x_0 , x_1 , G_0 , x_2)	
50	$\forall(x_0)$ [((¬(⟨ x_0 , x_1 ⟩ ∈ G_0(A_0))∨¬⟨ x_1 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0)) ∨⟨ x_0 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0))]	x_1 , G_0 , x_2	P_{35} (x_1 , G_0 , x_2)	
51	$\forall(x_1)$ $\forall(x_0)$ [((¬(⟨ x_0 , x_1 ⟩ ∈ G_0(A_0))∨¬⟨ x_1 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0)) ∨⟨ x_0 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0))]	G_0 , x_2	P_{36} (G_0 , x_2)	
52	$\forall(x_2)$ $\forall(x_1)$ $\forall(x_0)$ [((¬(⟨ x_0 , x_1 ⟩ ∈ G_0(A_0))∨¬⟨ x_1 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0)) ∨⟨ x_0 , x_2 ⟩ ∈ G_0(A_0))]	G_0	P_{37} (G_0)	G_0-транзитивное отношение

53	$\{ x_0 \mid \langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0) \}$	x_1 , G_0	$O_1 (x_1 , G_0)$	окрестность x_1-вершины из которых рёбра входят в x_1
54	$x_0 \in O_1 (x_1 , G_0)$	x_0 , x_1 , G_0	$P_{017} (x_0 , x_1 , G_0)$	
55	$\langle x_0 \rangle \in Q_1(x_1 , G_0)$	x_0 , Q_1	$P_{38} (x_0 , Q_1)$	
56	$Q_1(x_1 , G_0) \subset O_1 (x_1 , G_0)$	x_1 , G_0 , Q_1	$P_{39}(x_1 , G_0 , Q_1)$	
57	$\{ x_0 \mid \langle x_1 , x_0 \rangle \in G_0(A_0) \}$	x_1 , G_0	$O_2 (x_1 , G_0)$	окрестность x_1-вершины в которые рёбра входят из x_1
58	$x_1 \in O_2 (x_0 , G_0)$	x_1 , x_0 , G_0	$P_{021} (x_1 , x_0 , G_0)$	
59	$\langle x_1 \rangle \in Q_2(x_0 , G_0)$	x_1 , Q_2	$P_{40} (x_1 , Q_2)$	
60	$Q_2(x_0 , G_0) \subset O_2 (x_0 , G_0)$	x_0 , G_0 , Q_2	$P_{41}(x_0 , G_0 , Q_2)$	
61	$\exists(x_0)\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0)$	x_1 , G_0	$P_{42} (x_1 , G_0)$	
62	$\exists(x_1)\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0)$	x_0 , G_0	$P_{43} (x_0 , G_0)$	
63	$\{ x_1 \mid \exists(x_0)\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0) \}$	G_0	$E_0 (G_0)$	область значений G_0
64	$x_1 \in E_0 (G_0)$	x_1 , G_0	$P_{038} (x_1 , G_0)$	
65	$\{ x_0 \mid \exists(x_1)\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0) \}$	G_0	$F_0 (G_0)$	область определения G_0
66	$x_0 \in F_0 (G_0)$	x_0 , G_0	$P_{039} (x_0 , G_0)$	

67	$(A_0 \subset B_0)$	A_0 , B_0	$P_{44} (A_0 , B_0)$		$\forall (x_0) [(\neg ((x_0 \in A_0)) \& (x_0 \in B_0))]$
68	$\{ A_0 \mid (A_0 \subset B_0) \}$	B_0	$R_1 (B_0)$	множество подмножеств B_0	
69	$A_0 \in R_1 (B_0)$	A_0 , B_0	$P_{040} (A_0 , B_0)$		
70	$\{ B_0 \mid (A_0 \subset B_0) \}$	A_0	$S_0 (A_0)$		
71	$B_0 \in S_0 (A_0)$	A_0 , B_0	$P_{040} (A_0 , B_0)$		
72	$[(x_2 \in A_0)]$	x_2 , A_0	$P_{49}(x_2 , A_0)$		
73	$[((\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0)) \&[(x_2 \in A_0)])]$	$x_0 , x_1 , G_0 , x_2 , A_0$	$P_{50} (x_0 , x_1 , G_0 , x_2 , A_0)$		
74	$\{ \langle x_0 , x_1 , x_2 \rangle \mid ((\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0)) \&[(x_2 \in A_0)]) \}$	G_0 , A_0	$G_1 (G_0 , A_0)$	$A_0 \text{ x } A_0 \to A_0$	
75	$\langle x_0 , x_1 , x_2 \rangle \in G_1 (G_0 , A_0)$	$x_0 , x_1 , G_0 , x_2 , A_0$	$P_{041} (x_0 , x_1 , G_0 , x_2 , A_0)$		
76	$\langle x_0 , x_1 , x_2 \rangle \in G_2(x_1 , G_0 , A_0)$	x_0 , x_1 , x_2 , G_2	$P_{51} (x_0 , x_1 , x_2 , G_2)$		
77	$G_2(G_0 , A_0) \subset G_1 (G_0 , A_0)$	G_0 , A_0 , G_2	$P_{52}(G_0 , A_0 , G_2)$		

Расширение языка

- Из предиката принадлежности мы получили включение, пересечение, объединение, дополнение, разность, декартовое произведение множеств, множество-степень**.**
- <**Set**;∈>→ <**Set;** ∈, ∩, ∪, ×, ⊂ >

- Мы из предиката принадлежности получили всю сигнатуру теории множеств комбинаторно. В языке первого порядка сигнатура задается как правило изначально, в этом есть отличие. Новые обозначения вписываются в таблицу (четвертый столбец) человеком, т.к. компьютер их не знает. Затем они переносятся в первый столбец, и программа продолжает работать уже с новыми обозначениями.

Функции

$(\forall x0\ |M8(x0)|=1)=P22(A, B)$ A->B функция

$(\forall x0\ |M7(x0)|=1)=P23(A, B)$ A->B инъекция или сюръекция?

$\forall B\ (P6(A, B) \vee Q6(B, A) \vee B=\varnothing) \equiv |A|=1$

Группы

$\langle\langle x0, x1\rangle, x2\rangle \in G$ G= Ax A ->A

$P24(G)=\exists x1\ \forall x0 \langle\langle x0, x1\rangle, x0\rangle \in G$ в G есть единица

$P25(x1)= \forall x0 \langle\langle x0, x1\rangle, x0\rangle \in G$ x1-единица

$P26(G)= \exists x2\ \forall x0\ (\langle\langle x0, x2\rangle, x1\rangle \in G \wedge P25(x1))$ для всех элементов есть обратный: x2 обратный к x0.

Многообразия (Графоиды)

$\forall x0 \in A$ $|M8(x0)|=2 \wedge P27(A)$ одномерная поверхность (цикл) A- неориентированный граф

$P27(A)= \neg (\exists C \exists B\ A0=M2(C \times C, B \times B) \wedge Q2(M1(C,B)))$ -A связный

$\forall x0 \in A$ $|M8(x0)|=2 \vee |M8(x0)|=1 \wedge P27(A)$ одномерная поверхность с границей. Граница $|M8(x0)|=1$

$\forall x0 \in A$ $|M8(x0)|=3 \vee |M8(x0)|=2 \wedge P27(A)$ двухмерная поверхность с границей. Граница $|M8(x0)|=2$

Структуры множеств

R1(B)={A| P6(B, A)} множество подмножеств B

R2(B)={A| P6(A, B)} все множества, куда включается B

P21(R)= $\forall$A $\forall$B (P0(A, R) $\wedge$ P0(B, R)=>(Mi(A, B), R)) R-кольцо, алгебра множеств

Функции

$F\subset AxB\ \ x0\in A\ x1\in B$

$(P6(AxB,F)/\backslash(\forall x0\ (P0(x0,A)\ |M8(x0)|=1)))=P22(F, A, B)$ A->B функция

$(P6(AxB,F)/\backslash\ (\forall x0\ |M7(x0)|=1)=P23(F,A,B)$ A->B инъекция или сюръекция? исправить

$\forall B\ (P6(A, B) \vee Q6(B, A) \vee B=\varnothing)\equiv|A|=1$

Группы

$<<x0, x1>,x2>\in G\ \ G= Ax\ A\ ->A$

$P24(G)=\exists x1\ \forall x0<<x0, x1>,x0>\in G$ в G есть единица

$P25(x1)= \forall x0<<x0, x1>,x0>\in G$ x1-единица

$P26(G)= \forall x0\ \exists x2\ (<<x0, x2>,x1>\in G\wedge P25(x1))$ для всех элементов есть обратный: x2 обратный к x0.

+ассоциативность

Включение, пересечение, объединение, дополнение и т.д. это семантические понятия теории множеств. Отношения меду ними в нашей сети связаны со способом построения формул, которые обозначают эти понятия. Поэтому мы построили одновременно и синтаксическую и семантическую сеть.

С помощью программы **MathSem** можно построить, например, теоремы:

$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ =TRUE ;

$(A_0 \cap A_1) \subset A_1$ =TRUE; $(A_0 \cup A_1) \subset A_1 = A_0 \subset A_1$; $A_1 \subset (A_0 \cup A_1)$ =TRUE; $A_1 \subset (A_1 \cap A_0) = A_1 \subset A_0$.

Интерпретация нашей системы задается на конечном или счетном наборе x_i, A_i, M_i, R_i.

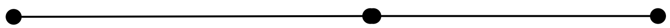
Для доказательств теорем мы используем классическую логику и законы и правила вывода в этой логике, плюс мы можем подставлять множество истинности как терм в предикат.

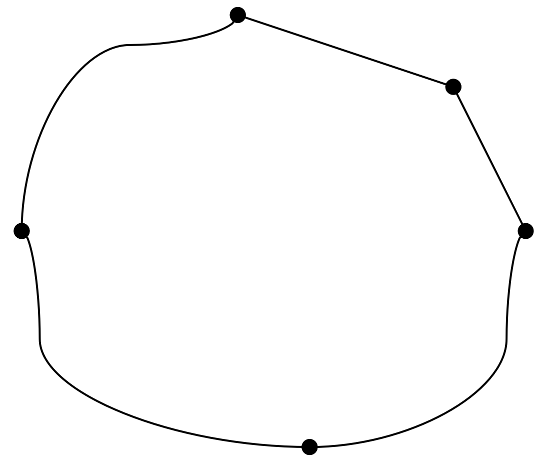
Для логики предикатов первого порядка существует стандартные алгоритмы автоматического доказательства. Метод резолюций и метод аналитических (семантических) таблиц описаны в [2,11].

Построили семантическую сеть понятий и утверждений из теории множеств. Интересно проследить связь построенной системы с аксиоматикой ZFC теории множеств[4]. Часть аксиом ZFC синтаксически выводится в нашей системе.

Компьютерная программа MathSem может использоваться как компьютерный практикум, например, по дискретной математике. Используя это программу, можно изучать математическую логику, теорию множеств, теорию отношений, теорию графов, теорию групп. Это знакомит студентов с такими современными направлениями в науке как семантические сети, представление знаний, онтологии, логический вывод.

Пути и циклы



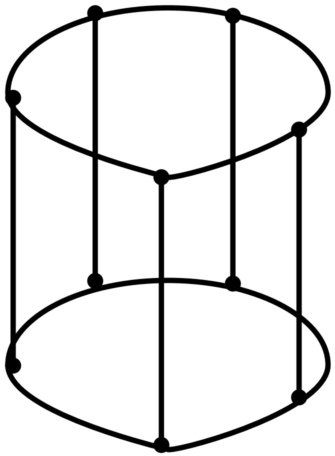


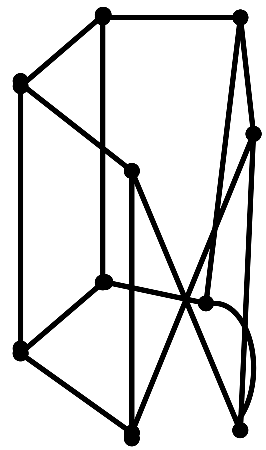
- Определение. *Циклом* называется связный одномерный граф без границы. У всех вершин степень равна двум.
-
- Определение. *Путем* называется связный одномерный граф с границей. Степени вершин два или один.

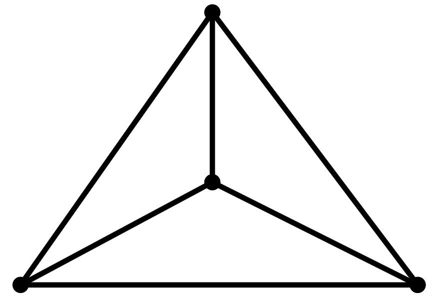
- <u>Определение.</u> Две вершины в графоиде *G* называются *близкими*, если они соединены ребром.
-
-
- <u>Определение.</u> Два пути (цикла) в графоиде *G* называются *близкими*, если для каждой вершины одного пути (цикла) существует вершина в другом пути (цикле), совпадающая с данной или соединенная с данной ребром. При этом близкие вершины переходят в близкие.
-
- Понятие близости есть отношение на циклах и путях.
-
- <u>Определение.</u> *Гомотопными* называются пути(циклы) L_1 и L_N если существует последовательность близких путей(циклов) $L_1, L_2, \ldots, L_N$, таких, что L_i близко к L_{i+1}.
-
- Отношение гомотопии это транзитивное замыкание отношения близости.
- Можно факторизовать циклы по отношению гомотопии. Получим фактор-множество состоящее из классов эквивалентности гомотопных циклов.

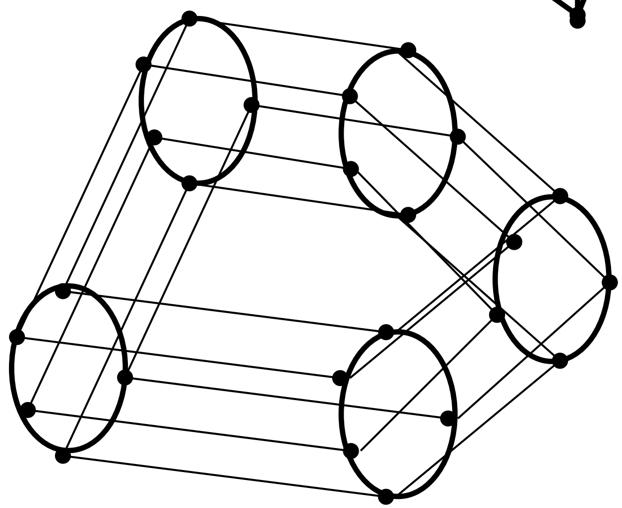
- Определение. *Двумерный графоид* (соответствует двумерной поверхности)– это граф, каждое ребро которого и вершина принадлежат хотя бы одному минимальному циклу, каждый минимальный цикл содержит ребро, через которое проходит ровно один другой минимальный цикл (такие циклы будем называть гранями). Все грани соединены по одному смежному ребру (они называются смежными). Через ребро проходит максимум две грани. По смежным граням можно дойти до любой грани.
-
- Определение. *Границей двумерного графоида* (поверхности) называется набор ребер, которые не являются смежными (общими) для двух граней.
-
- Определение Поверхность называется *односвязной*, если содержит один класс эквивалентности по гомотопии.

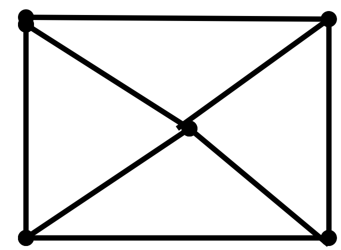
- Определение. *Диском* называется односвязная поверхность со связной границей (один одномерный цикл)
-
- Определение. *Лентой Мебиуса* называется неодносявязная поверхность со связной границей (одномерный цикл).
-
- Определение. *Цилиндром* называется поверхность с несвязной границей из двух одномерных циклов.
-
- Определение. *Сферой* называется односвязная поверхность без границы (число вершин и граней конечно)
-
- Определение *Тором* называется неодносвязная поверхность без границы с двумя классами гомотопных циклов.











- Определение. *Минимальным по данному свойству P* называется графоид $G(P)$ с минимальным числом вершин, для которого выполняется свойство P.
-

ONTOMathPro

- Управление математическими знаниями: онтологические модели и цифровые технологии
- Казанский (Приволжский) федеральный университет,
- Институт прикладной семиотики АН Республики Татарстан, Казань
amelizarov@gmail.com
alik.kirillovich@gmail.com elipachev@gmail.com
onevzoro@gmail.com

Математические знания в интернете

- **Определяющей составляющей такой интеграции является процесс семантического структурирования научного контента. Для его обеспечения консорциум W3C (www.w3.org) разрабатывает технологии Семантического Веба. В частности, на платформе XML создан широкий спектр языков разметки, позволяющих не только учесть специфику предметных областей, но и повысить эффективность структурирования при автоматизированной обработке информации.**
- **Математическая область знаний трудна для моделирования в силу ее абстрактности (многие определения традиционно даются на основе математической нотации в формульной записи); наличия эквивалентных определений ряда понятий (что затрудняет установление связей логической зависимости между терминами) и проблемы согласования различных мнений математиков-профессионалов по поводу неустоявшейся терминологии. Представление математических знаний в виде, пригодном для компьютерной обработки, — актуальная и быстро развивающаяся область исследований. Одним из примеров успешного использования ИКТ в области математики служит портал Math-Net. Ru (http://www.mathnet.ru/) Ниже представлены новые подходы к семантическому структурированию электронных математических документов и полученные на их основе результаты.**
- **Казанский (Приволжский) федеральный университет**

- **1. Семантические модели математических документов можно создавать с помощью таких формальных языков, как MathLang и OMDoc . Один из новых подходов базируется на понятии "связанные данные": в рамках проекта Linking Open Data (LOD, http:// www.w3.org/wiki/SweoIG/TaskForces/Communi-tyProjects/LinkingOpenData) на основе унифицированной семантической модели созданы интегрированная база знаний и программные средства ее поддержки; данные хранятся в виде триплетов RDF. В рамках проекта LOD сформировалось новое направление — семантическая публикация данных, предполагающее увеличение числа семантических компонент текста. Сегодня в облаке LOD создано несколько онтологических моделей, в частности, набор данных DBPedia (http://dbpedia.org) содержит около 400 тыс. математических понятий. Базу данных из более чем 9.4 тыс. определений математических концептов и 49 тыс. теорем поддерживает Mizar Mathematical Library (http://mizar. org/), а такие системы семантического поиска, как Sindice (http://sindice.com) и Semantic Information MAshup (http://www.w3.org/2001/sw/wiki/ sig.ma), используют опубликованные RDF-дан-ные. Представление математических текстов в виде связанных данных можно выполнить и с помощью системы STEX. Для моделирования предметных областей разрабатывают специализированные схемы данных — онтологии, например, Sci-enceWISE (http://sciencewise.info/) дает определения свыше 2.5 тыс. математических терминов, а онтология Mocassin (http://code.google.com/p/mocassin) описывает семантику структурных элементов научных статей по математике. Вместе с тем, моделирование математической предметной области остается открытой проблемой. Ниже представлены некоторые подходы к ее решению.**

- **2. Онтология OntoMathPRO элементов математического знания создана нами в содружестве с группой математиков Казанского федерального университета и содержит определения как общепринятых математических**
- **понятий, так и развивающуюся терминологию из теории чисел, теории множеств, алгебры, геометрии, математической логики, дискретной математики, теории алгоритмов, математического анализа, дифференциальных уравнений, численных методов, теории вероятностей и математической статистики. Основой онтологии послужил массив статей журнала "Известия вузов. Математика" за 1995—2009 годы: она содержит 3450 классов, 6 типов свойств объектов, 3630 экземпляров свойства "подкласс—класс" и 1140 экземпляров остальных свойств. Метаданные каждого класса включают его определение и наиболее употребляемые наименования, в том числе синонимы. Семантика концептов OntoMathPRO устанавливалась с использованием как классических математических изданий, так и электронных ресурсов, в частности Wikipedia и Cambridge Mathematical Thesaurus. Решена задача упорядочивания массива математических понятий путем выделения ассоциативных связей, моделирующих различную степень зависимости как между самими терминами, так и между ними и разделами математики, представленными в онтологии. OntoMathPRO содержит тексты определений математических понятий и может рассматриваться как образовательный ресурс.**
- **По отношению "подкласс — класс" в On-toMathPRO выделены две иерархии — разделов математики и элементов математического знания. В первой представлена таксономия основных разделов математики. Фундаментальные разделы — геометрия и анализ — разработаны более детально, например, выделены такие подразделы геометрии, как аналитическая, дифференциальная, фрактальная геометрия. Верхний уровень иерархии представлен тремя типами классов:**
- **(i) базовые математические понятия (например, множество, оператор, функция, тензор);**
- **(ii) корневые элементы соответствующих разделов математики (например, элемент теории математического анализа, элемент теории чисел);**
- **(iii) общенаучные понятия (например, теорема, задача, метод, формула, высказывание).**
- **Допускается нахождение класса в разных иерархиях (например, класс "Теорема Коши" является как подклассом класса "Теорема", так и подклассом класса "Элемент теории дифференциальных уравнений").**

Языки OntoMathPro

- **В качестве языков представления OntoMathPRO выбраны OWL-DL/RDFS. В частности, разделы математики и элементы математического знания выражены с помощью концепта owl:Class. Уникальный идентификатор ресурса (URI) каждого класса представляет собой ключ, который составлен из пространства имен онтологии и кода, однозначно идентифицирующего класс внутри онтологии.**
- **В OntoMathPRO определены четыре типа отношений между классами: отношение "подкласс-класс"; направленное объектное отношение принадлежности между элементом математического знания и разделом математики; направленное объектное отношение логической зависимости между элементами математического знания; симметричное объектное отношение ассоциативности.**
- **OntoMathPRO реализована на языке OWL-DL; для работы с ней могут быть использованы такие средства, как редактор Protégé и программная библиотека Jena.**

- **Поиск в математических текстах имеет особенности, связанные со сложной организацией математических документов, - объектом поиска служат как постановки задач, утверждения и их доказательства, так и формулы в различных системах нотации. С другой стороны, высокая степень структурированности и формализованности математических текстов обеспечивает дополнительные возможности поиска. Одна из реализаций такого поиска выполнена на основе MathML-разметки в Lobachevskii Journal of Mathematics (LJM, http://ljm.ksu.ru) — первом российском электронном математическом журнале, учрежденном в 1996 г. , — с предоставлением облачного сервиса, обеспечивающего, помимо стандартных возможностей, и поиск по формулам. В основе разработанного алгоритма поиска лежит технология преобразования математических документов в XML-формат, а формульных конструкций — в MathML-нотацию .**
- **Сегодня язык MathML — это стандарт представления математической информации в электронной форме: реализуя одну из основных современных тенденций информатики (разделение разметки и данных), технология MathML-обра-ботки данных представляет возможности многоуровневого структурирования и интелектуального поиска. MathML может быть использован для организации сервисов представления математических формул, создания, хранения и отображения электронных публикаций по математике, а также организации поиска в математических текстах. Впервые ряд таких сервисов был реализован в журнале LJM.**

- **4. Программная платформа для публикации семантических данных математических коллекций. Подготовка математических RDF-наборов связанных данных для публикации их в LOD выполнена на основе статей журнала "Известия вузов. Математика" за 1997—2009 гг. Основные функции созданного прототипа программной платформы: индексирование математических статей в формате LATEX в виде LOD-совместимых RDF-данных; извлечение метаданных в виде концептов онтологии AKT Portal Ontology (http://www.aktors.org/publica-tions/ontology/); извлечение логической структуры документов с использованием онтологии Mocassin; извлечение экземпляров математических сущностей в виде концептов онтологии OntoMathPRO и связывание с ресурсами DBPedia; распознавание семантики формул путем связывания полученных экземпляров математических сущностей с математическими выражениями и формулами в тексте; установление взаимосвязи между опубликованными RDF-данными и существующими наборами данных LOD. Математический RDF-набор данных строится с использованием On-toMathPRO и онтологии семантики**

Платформа семантической публикации

- Вход:
- Коллекция статей в формате LaTex

- Выход:

- RDF-наборы в базе данных

RDF

- **Resource Description Framework** (RDF, «среда описания ресурса»[1]) — это разработанная консорциумом Всемирной паутины модель для представления данных, в особенности — метаданных[2]. RDF представляет *утверждения* о *ресурсах* в виде, пригодном для машинной обработки. RDF является частью концепции семантической паутины.
- Ресурсом в RDF может быть любая сущность — как информационная (например, веб-сайт или изображение), так и неинформационная (например, человек, город или некое абстрактное понятие). Утверждение, высказываемое о ресурсе, имеет вид «субъект — предикат — объект» и называется ***триплетом***[1]. Утверждение «небо голубого цвета» в RDF-терминологии можно представить следующим образом: субъект — «небо», предикат — «имеет цвет», объект — «голубой». Для обозначения субъектов, отношений и объектов в RDF используются URI.
- Триплет RDF
- Множество RDF-утверждений образует ориентированный граф, в котором вершинами являются субъекты и объекты, а рёбра отображают отношения.
- RDF сам по себе является не форматом файла, а только лишь абстрактной моделью[2] данных, то есть описывает предлагаемую структуру, способы обработки и интерпретации данных. Для хранения и передачи информации, уложенной в модель RDF, существует целый ряд форматов записи.
- Для обработки RDF-данных предлагается реализовать языки запросов: SPARQL (стандарт W3C), RQL, RDQL.

Платформа семантической публикации

- Содержимое набора
- •Метаданные:
- Названия, дата и т.д.
- Авторы
- Организации

- → Онтология AKT Portal
- Логическая структура статьи: раздел, теорема, доказательство, формула, …

- →Онтология Mocassin
- •Терминология→ОнтологияOntoMathpro

- Формулы, привязанные к терминологии

Отношения

1)Класс → Подкласс (ISA)

- Число → Простое число

2)Область математики → Математический объект

Метрическая геометрия → Барицентрические координаты

3)Определяется с помощью

- Символ Кристоффеля → Связность

2)Смотри также

- Циклический итерационный метод Чебышева → Численное решение СЛУ

3)Задача → Метод решения

- Система линейных уравнений → Метод Гаусса

Finding Concepts in Mathematical Formulas *alpha*

Ring

Get instances!

Examples: Angle, Ring, Graph, Open set, Prime number, Gamma function, Space

- [x] Axiom (0)
- [x] Claim (0)
- [x] Conjecture (0)
- [x] Corollary (0)
- [x] Definition (0)
- [x] Equation (0)
- [x] Example (0)
- [x] Lemma (0)
- [x] Proof (3)
- [x] Proposition (2)
- [x] Remark (0)
- [x] Theorem (7)

Ring concept instances (26):

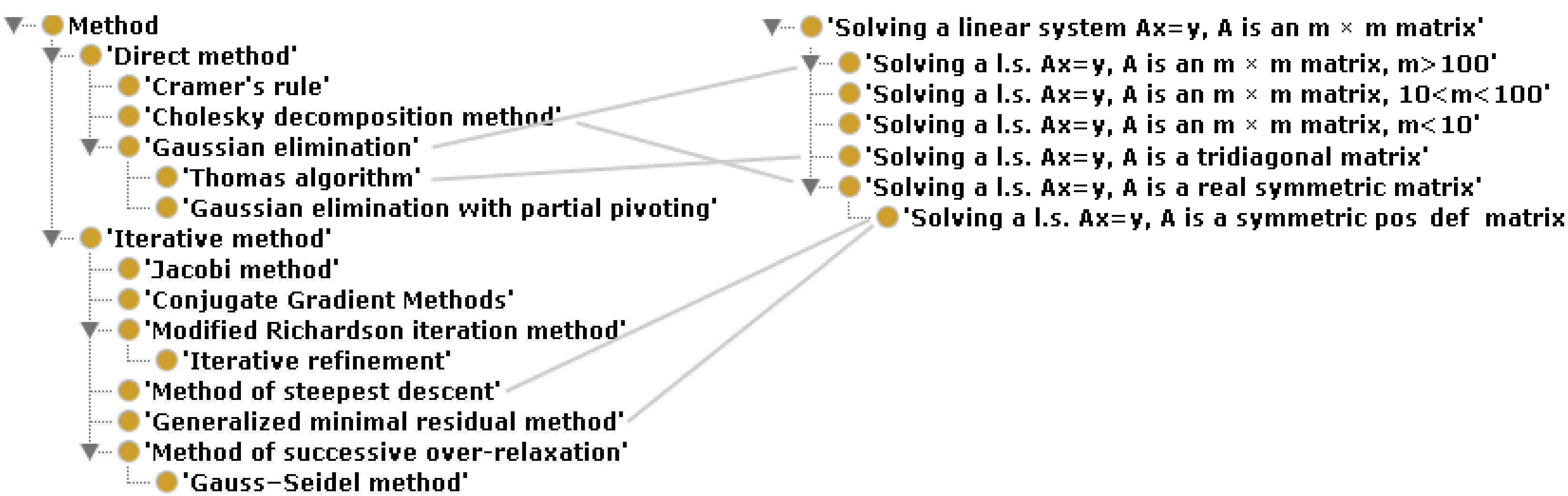
Notation	Formula	Context	
R	$J(R)^2 \neq J(R)^3$	Theorem	Details...
R	$J(R)^2 \neq 0$	Proof	Details...
R'	$R[H]$	Proposition	Details...
$\mathcal{K}$	$z \in \mathcal{K}^+$	Other	Details...

Образование: проверка знаний студентов

Мы взяли фрагмент онтологии (по теме «Численные методы»), содержащий:

•Удалили связи

•Задача студента: восстановить связи



Литература

1. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. – М.: Изд-во МЦНМО. – 2008. – 288 с.
2. Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В. . Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах.-М:Физматлит-2004.-704 с.
3. Захаров В.К. Локальная теория множеств.// Математические заметки- 2005 , с.194–212
4. Лавров И.А. Математическая логика. – М. :Академия. – 2006. – 240 с.
5. Люксембург А.А. Автоматизированное построение математических теорий. – М.: Изд-во УРСС. – 2005. – 30 с.
6. Маслов С.Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения - М.: Радио и связь-1986.
7. Непейвода Н.Н. Прикладная логика. Учебное пособие. — Новосибирск, 2000. — 521 с
8. Осипов Г.С. Лекции по искусственному интеллекту.-М.: Красанд-2009.-272 с.
9. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов**.** Архитектура и языки решателя задач. -М.: Физматлит.- 2008. - 1024 с.
10. Давыденко И.Т., Житко В.А., Заливако С.С., Корончик Д.Н., Мошенко С.Г., Савельева О.Ю., Старцев С.С., Шункевич Д.В. Интеллектуальная справочная система по геометрии - Минск -Труды конференции OSTIS-2011.
11. Robinson J.A., Voronkov A. (Eds.). Handbook of Automated Reasoning (in 2 volumes). Elsevier and MIT Press-2001.
12. Интернет, программа VUE *http://vue.tufts.edu/about/index.cfm*

13. А. М. Елизаров, Е. К. Липачёв, О. А. Невзорова, В. Д. Соловьев МЕТОДЫ И СРЕДСТВА СЕМАНТИЧЕСКОГО СТРУКТУРИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКУМЕНТОВ ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2014, том 457, № 6, с. 642-645
14. Люксембург Андрей живой журнал